Juillet 2009

# CURRICULUM VITÆ ET TRAVAUX DE DENIS BOSQ

## CURRICULUM VITAE

BOSQ Denis, né le 16 juillet 1939 à Paris XIIè, nationalité Française, deux enfants.

**Adresse personnelle :**
74, rue Dunois, 75013 Paris,
Téléphone : 01.45.85.35.91

**Adresse professionnelle :** Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)
LSTA, 8ème étage, bâtiment A,
175 rue du Chevaleret, 75013 Paris Téléphone : 01.44.27.85.63.

| | |
|---|---|
| 1956 | Baccalauréat (Poitiers) |
| 1959 | Licence ès-Sciences Mathématiques (Paris) |
| 1960 | DEA de Mathématiques (Paris) |
| 1961 | DEA de Statistique (Paris) |
| 1964 | Doctorat 3è cycle (Paris) |
| 1965-1966 | Stagiaire de Recherche au CNRS |
| 1966-1967 | Enseignant à l'Université du Chili (Coopération) |
| 1967-1972 | Attaché de Recherche au CNRS |
| 1971 | Doctorat ès-Sciences (Paris) |
| 1972-1986 | Chargé d'enseignement puis Maître de Conférences puis Professeur à l'Université de Lille I. |
| 1973-1985 | Maître de Conférences (mi-temps) à l'Ecole Polytechnique |
| 1.1.1985 | Professeur de 1ère classe (Lille) |

Depuis le 1er décembre 1986 : Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie
1er janvier 1997 : Professeur de classe exceptionnelle (1er échelon)
1er janvier 2004 : Professeur de classe exceptionnelle (2ème échelon)
Depuis le 1er septembre 2007 : Professeur émérite à l'Université Pierre et Marie Curie

## ENSEIGNEMENT

- **A l'Université du Chili** (1966-67)
  Probabilités et Statistique, Fonctions de variable complexe, Théorie des distributions, tests.
- **A l'IUT de Paris V** (1968-71)
  Analyse.
- **A l'Université de Lille I** (1972-85)
  – Probabilités et Statistique en DEUG A puis en DEUG B
  – Probabilités et Intégration, Statistique Mathématique

– Probabilités approfondies
– DEA (1972-86)

- **A l'Ecole Polytechnique** (1973-85)
  – Petites classes en Probabilité
  – Cours d'options et enseignements de synthèse (séries chronologiques)
  – Encadrement de stages de Statistique Appliquée.
- **A l'ENSAE**
  – Cours de théorie des Probabilités (1986-1998)
  – Animation de groupes de travail (1985-1987)
  – Calcul Stochastique (1999-2002), (2002-2003), (2003-2004)
  – Statistique des processus à temps continu (entre 1999 et 2005)
- **A l'Université Paris VI** (depuis 1986)
  – Statistique Mathématique puis Probabilités
  – Processus puis Statistique des Processus
  – DEA de Statistique (depuis 1985)
  – DEA de Physique des fluides (2001-2004)
  – Master 2 de Statistique (depuis 2007)
- **A l'Université Libre de Bruxelles**
  – Cours de séries temporelles (1996).
- **A l'Université de Padoue**
  – Cours de DEA (1992-2007).

**Polycopiés**

1. Estimation fonctionnelle (DEA - 1975)
2. Statistique Mathématique (Maîtrise - 1978)
3. Séries chronologiques (DEA - 1980)
4. Théorie des Probabilités (dernière édition 1991)
5. Exercices de Probabilités (ENSAE - 1995) en Coll. avec. L. SERLET et F.COMTE.
6. Statistique des Processus (Maîtrise - 1993).
7. Processus à temps continu (DEA - 1997).

**Livres**

1. Théorie de l'estimation fonctionnelle (en coll. avec J.P. LECOUTRE) -ECONOMICA (1987).
2. Analyse et prévision des séries chronologiques (en coll. avec J.P. LECOUTRE) MASSON (1992).
3. A course in Stochastic processes. Stochastic models and Statistical inference (en coll. avec H.T. NGUYEN). 351 pages. Kluwer Acad. Publishers (1996).

4. Nonparametric Statistics for stochastic processes. Estimation and prediction. 169 pages. Lecture Notes in Statistics. Springer-Verlag (1996). $1^{ère}$ ed. 169 pages (1996), $2^{e}$ ed. 210 pages (1998).
5. Linear processes in function spaces. Theory and Applications 283 pages. Springer, Lecture notes in Statistics n° 149 (2000).
6. Inférence et prévision en grandes dimensions. Economica 194 pages (2005).
7. Inference and prediction in large dimension (coll. D. Blanke), 316 pages, Wiley-Dunod (2007).

## PRINCIPALES RESPONSABILITES ADMINISTRATIVES

- Editeur en chef de "Statistical inference for Stochastic Processes" depuis 1998.
- Editeur en chef des Annales de l'ISUP (Publications de l'ISUP) depuis 1992.
- Directeur de l'ISUP (janvier 2005-septembre 2007).
- Responsable de l'équipe de Probabilités et Statistique de l'Université de Lille I de 1972 à 1985.
- Directeur adjoint de l'UFR de Mathématiques pures et appliquées de l'Université Paris VI (1989-2004).
- Editeur associé des Publications de l'ISUP jusqu'en décembre 1992.
- Membre du CNU pendant 8 ans.
- Responsable de la MAF pour la Statistique à Lille I puis à Paris VI.
- Membre de conseils d'UER ou d'UFR, du conseil de l'ISUP, du conseil du LSTA, de commissions de spécialistes, de commissions de services, de commissions de scolarité, de la commission constitutionnelle de l'IHP, etc.
- Editeur associé de "Journal of nonparametric statistics" (1997-2002) et de "Journal of information and optimization Science" depuis janvier 2000.
- Commissions : "étude de réunification d'UFR" (2003), "retour à Jussieu" (depuis 2003).
- Membre du Conseil de la Recherche du CREST (INSEE).

## DIRECTION DE RECHERCHE ET DE SEMINAIRES

De 1986 à 2007, j'ai organisé le **Séminaire de Statistique et Probabilités** de l'Université de Lille I **de 1973 à 1986**.

**De 1986 à 2007**, j'ai organisé à l'Université Pierre et Marie Curie un **séminaire de Statistique non paramétrique et semi-paramétrique** (coorganisateur : M. Delecroix).

Depuis 1973 j'ai dirigé **plus de 50 thèses** : 10 thèses d'Etat ou habilitations, 27 nouvelles thèses, 13 thèses 3ème cycle. En voici la liste avec la position actuelle de mes anciens élèves :

- **Thèses d'Etat et habilitations :**

A. BERLINET (1984) Professeur à l'Université de Montpellier (Thèse d'État + HDR).
M. DELECROIX (1987) Professeur à Paris 6.
J. AKONOM (1988) Professeur à l'Université Catholique de Lille.
C. GUILBART (1978) décédé.
T. MOURID (1995) reparti en Algérie - Professeur à l'Université de Tlemcen.
M. CARBON (1995) Professeur à l'Université de Rennes.
D. GADIAGA (2003) Professeur à l'Université de Ouagadougou.

**Pour mémoire :** HDR (E. Guerre (2001) MdC Paris 6, F. Merlevède (2002) PR Marne-la-Vallée, G. Biau (2003) PR Paris 6, D. Blanke (2004) PR Avignon, B. Pumo (2006) PR Angers).

- **Nouvelles thèses :**

A. JARRAR (1986) reparti au Maroc.
M. CARBON (1988) Professeur à l'Université de Rennes.
A. GANNOUN (1989) Maître de Conférences à Montpellier.
D. SMILI (1990) Maître de Conférences à Lille.
0. LESSI décédé.
N. BENSAID (1992) Maître de Conférences à Montpellier.
B. PUMO (1992) Professeur à I.H. d'Angers.
E. GUERRE (1993) Maître de Conférences à l'Université Pierre et Marie Curie.
A. DANGA (1994).
N. RHOMARI (1994) Maître Assistant à Oujda.
N. CHEZE-PAYAUD (1994) Maître de Conférences à Nanterre.
F. LEBLANC (1994) Maître de Conférences à Grenoble.
J. SHEN (1995) Maître Assistant à Shanghai.
W. QOSSAIM (1996) Maître Assistante au Maroc.
F. MERLEVEDE (1996) Professeur à l'université de Marne-la-Vallée.
D. BLANKE (1997) Professeur à l'université d'Avignon.
J. MAES (1999) Maître de Conférences à Reims.
A. MAS (2000) Professeur à Montpellier.
S. LARDJANE (2000) (codirection avec M. Delecroix et M. Carbon). Maître de Conférences à Vannes (2001).
S. GUILLAS (2001) Associate Professor à University College (Londres).

J. ZHANG (2001) Associate Professor à Shanghai.
I. SEROT (2002) Statisticienne à la FINAREF.
S. NIANG-DABO (2002) Maître de Conférences à Lille 3.
R. IGNACOLLO (2002) Chercheur à l'Université de Turin (thèse en co-tutelle).
A. FRENAY (2003).
J.B. AUBIN (2005) Maître de Conférences à l'université de Compiègne.
F. RACHEDI (2005) Assistante à Tlemcen.
A. BIANCHI (2007) Assistante à Milan.
C. TURBILLON (2007) Assistante à Angers.
O. FAUGERAS (2008) Maître de conférences à Toulouse.

- **Thèses 3è cycle :**

P. JACOB (1973) Professeur à l'Université de Montpellier
J. BLEUEZ (1976) Maître de Conférences à Nice
M. OULEDCHEIKH (1978) Maître de Conférences à Lille
B. DEREMETZ (1980) Maître de Conférences à Valenciennes
N. RAHMANIA (1980) Maître de Conférences à Lille
T. MOURID (1982) Professeur à l'Université de Tlemcen
D. GADIAGA (1982) Maître Assistant à Ouagadougou
A. SBAI (1982) reparti au Maroc
C. GUILBART (1973)
M. DELECROIX (1975)
J. AKONOM (1978) (Voir thèses d'Etat et nouvelles thèses)
A. BERLINET (1980)
M. CARBON (1981)

Je dirige ou co-dirige 5 doctorants (1 MRT, 1 CIFRE).

## CONFERENCES INVITEES ET SEMINAIRES

- GRENOBLE (1976) - Congrès Européen des Statisticiens.
- BRUXELLES (1985) - Approches non paramétriques en Analyse Chronologique.
- LOUVAIN (1985) - Rencontres Franco-Belges de Statistique.
- GRENOBLE (1988) - Congrès de l'ASU.
- BRUXELLES (1989) - Journées de Statistique non paramétrique.
- SPETSES (Grèce) (1990) - NATO advanced Institute on Nonparametric Functional Estimation and Related Topics (Org. L. DEVROYE, G. ROUSSAS) : 2 conférences invitées.
- ORSAY (1977, 1991).
- PARIS VI - Une dizaine de conférences ou séminaires.
- LOUVAIN (1990, 1994).

- COIMBRA plusieurs conférences (notamment en 1993).
- LISBONNE.
- PADOUE (8 conférences) (1988-1992).
- BOLOGNE
- TURIN
- CONCEPCION (Chili) (1967) - Journées de Mathématiques.
- TOULOUSE (1992, 1993).
- ROUEN
- BREST
- LILLE - Une quinzaine de séminaires ou conférences.
- STRASBOURG (1994).
- COIMBRA - Congrès Portugais de Statistique (1994).

**Conférences et congrès 1995 - 1998**

- MONTPELLIER (IIIème journée non-paramétrique de Montpellier).
  12 juin 1996 - Conférence invitée.
- VALPARAISO (VI Latin American Congress on Probability and Mathematical Statistics. 20-24 novembre 1995) - (Communication invitée).
- GRENOBLE Séminaire de Statistique - Conférence invitée (mars 1995).
- BUDAPEST Colloque "Méthodes des Processus hors d'équilibre".
  19-22 septembre 1995 (Matrafüred) - Conférence invitée.
- BERLIN - Conférence invitée (juin 1995).
- PADOUE - Cours de DEA (septembre 1995).
- ATHENES - Congrès d'Analyse non linéaire - Conférence invitée (juillet 1996).
- TATA (Hongrie) - Colloque sur les "systèmes complexes" - Conférence invitée (septembre 1996).
- RENNES - Séminaire de l'ENSAI - Conférence invitée (janvier 1997).
- LE MANS - Congrès de Statistique des Processus - Conférence invitée (janvier 1997).
- LILLE - Séminaire de Statistique - Conférence invitée (février 1997).
- CARCASSONNE - Congrès de l'ASU - Conférence invitée (mai 1997).
- SHANGHAI - Université Fudan - 2 conférences invitées (novembre 1997).
- XIAN - Conférence invitée (novembre 1997).
- BERLIN - Conférence invitée (janvier 1998).
- OBERWOLFACH - Workshop (mars 1998).
- COIMBRA (Juin 1998).

**Conférences invitées 1999 - 2008**

- MONTPELLIER (juin 1999).
- PADOUE (septembre 1999, septembre 2001).
- NEW DELHI (Congrès de l'Indian Statist. Institute, décembre 1999 - absent pour raisons familiales).
- COSTA RICA (XIIe SIMMAC Liberia, janvier 2000).
- LILLE (Colloque Théorèmes limites en statistique et probabilités, mars 2000).
- PARIS (Int. Workshop on : Goodness-of-fit Tests and Validity of Models. Univ. Paris 5, mai 2000).
- TURIN (juin 2000) 2 conférences, (décembre 2001).
- COIMBRA
- LE MANS (Journées de Statistique des processus) décembre 2000, décembre 2003, janvier 2005.
- BORDEAUX (Congrès Franco-Marocain) juin 2001.
- BRUXELLES (XXXIVèmes journées de Statistique) Conférence et organisation d'une session sur les processus autorégressifs fonctionnels, mai 2002.
- TOULOUSE (juin 2002), SANTIAGO DE COMPOSTELLA (juin 2002), LA CORUÑA (juin 2002).
- CRÈTE (International conference on current advances and trends in nonparametric statistics) Conférence et organisation d'une session sur l'estimation fonctionnelle dans les processus à temps continu, (juillet 2002).
- OUJDA (septembre 2002), TURIN (décembre 2002).
- TLEMCEN (avril 2003) Processus linéaires Hilbertiens (2 conférences), BARCELONE (septembre 2003), Statistique asymptotique.
- GRENOBLE (juin 2003), OUAGADOUGOU (novembre 2003), PADOUE (septembre 2003).
- BRUXELLES (2004), MONTPELLIER (Congrès SFDS 2004), TÉHÉRAN (Congrès Iranien de Statistique, 2004), PALERME (Congrès de Géométrie stochastique, 2004).
- En 2005 : ANGERS, BRESSANONE.
- En 2006 : MARSEILLE (journées fonctionnelles), PADOUE.
- En 2007 : TOKYO, MILAZZO.
- En 2008 : BARCELONE, BONN, BRUXELLES, LONDRES, OTTAWA, TOULOUSE, ROME.
- En 2009 : SHANGHAI (Fudan et Tongji), HANGZOU, PADOUE, BRUXELLES.

**CITATIONS**

Dans B.L.S. PRAKASA RAO - Nonparametric functional estimation. Acad. Press (1983) sont reproduits une partie de mes travaux.

Mes travaux sont cités dans d'autres ouvrages, par exemple :

- N.N. CENCOV - Statistical decision rules and optimal inference. Trans. Of Maths. Monograph, 53, AMS (1981).
- L. DEVROYE L. GYORFI - Nonparametric density estimation : the $L_1$ view. Wiley (1985).
- P. DOUKHAN - Mixing : Properties and examples (1992).
- L. GYORFI, W. HARDLE, P. SARDA, P. VIEU - Nonparametric curve Estimation from time series. Springer-Verlag (1989).
- I.V. BASAWA - B.L.S. PRAKHASA RAO - Statistical inference for stochastic processes. Acad. Press (1980).
- N. CRESSIE - Statistics for spatial data. Wiley Series (1991).
- A.P. KOROSTELEV - A.B. TSYBAKOV - Minimax theory of image reconstruction. 255 p. Springer-Verlag (1993).
- Y. KUTOYANTS - Statistical inference for ergodic diffusion processes. (2003).
- ...

D'autres citations figurent dans Annals of Statistics, Theory of Probability and Applications, Journal of Multivariate Analysis, etc.

**DIVERS**

- Membre élu de l'Institut International de Statistique (démissionnaire en 2004).
- Membre de la Société Bernoulli, de la SFDS et de la SMAI
- Membre du LSTA (Paris 6).
- Membre du Comité Scientifique de la Conférence satellite de Padoue du Congrès Mondial de Statistique de Florence (1993), avec SUBBA RAO, BRILLINGER, PRIESTLEY et HANNAN.
- Membre du Comité Scientifique des Journées de l'ASU (Lille 1986, HEC 1995, Rennes 1998).
- Chairman dans diverses sessions de Congrès.
- Organisation d'un stage de Probabilités destiné aux enseignants non probabilistes de l'UER (Lille 1975).
- Organisation de stages sur les séries chronologiques destiné aux ingénieurs (Paris 1988, 1989).
- Correcteur du Concours d'entrée à l'École Centrale Paris de 1986 à 1995.
- Membre du jury du CAPES interne (1989, 1990).

- Membre du jury d'Etat de l'Université Catholique d'Angers (depuis 1987).
- Participation à des projets européens (Tempus, etc.).
- Professeur visiteur à temps partiel à l'Université Libre de Bruxelles (1995-96).
- Mise en place d'une convention Université Paris 6 - Université Fudan (Shanghai, 1997).
- Conseiller scientifique de l'Université de Coimbra (Portugal, 1998-2000).
- Mise en place d'une convention Université Paris 6 - Université de Ouagadougou (Burkina Faso, 1999).
- "Opponent" d'une thèse à Lund (Suède, 1999) et interrogateur d'une "Agregacao" à Coimbra (2002).
- Membre du CNU (1995-2003).
- Mise en place d'une Convention Université Paris 6. Université de Turin (2000) avec codirection d'une Thèse.
- Mise en place d'une convention Université Paris 6 - Université d'Oujda.
- Membre du Comité Scientifique du Congrès du Mans (2002), de Lyon SFDS (2003), Montpellier SFDS (2004), Angers SFDS (2007), ...
- Participation à près de 150 jurys de thèses
- Referee pour de nombreuses revues internationales.
- Accord CMEP Paris 6 - Tlemcen.
- Professeur associé à l'université de Milan (deux mois en 2005).
- Participation à une expertise statistique pour le IPDCO (2009).

# RAPPORT SCIENTIFIQUE

Le plan de ce rapport permet de diviser en quatre parties :

- Les paragraphes 1-6 concernent la **Statistique sur échantillon**.
- Les paragraphes 7-9 portent sur la **Statistique des processus à temps discret**.
- La **Statistique des processus à temps continu** est traitée dans les paragraphes 10 et 11.

D'autres sujets sont abordés dans le paragraphe 12.

# 1 Estimation sans biais et optimalité

Il est curieux de constater que la plupart des traités de Statistique considèrent l'existence d'un estimateur sans biais comme allant de soi. Des conditions assurant cette existence ont pourtant été étudiés par KOLMOGOROV (vers 1940), HALMOS (1946), BICKEL-LEHMANN (1969). Pour la densité le problème a été notamment abordé par ROSENBLATT (1956) et IBRAGIMOV-KHASMINSKI (1982).

J'ai étudié d'abord ce problème dans ma thèse en définissant la notion de paramètre **local** et celle de paramètre **homogène**. Un paramètre est localisé par une ensemble $E$ si sa valeur ne dépend que de la restriction de la loi des observations à un voisinage de $E$. Il est local s'il est localisé par un point. La notion d'homogénéité est un peu plus précise.

J'ai montré qu'**un paramètre homogène n'est pas estimable sans biais** (ESB). Ce résultat s'applique à la densité et ses dérivées, à la densité conditionnelle et à la régression, à la fonction frontière du support d'une Probabilité. Il est plus général que celui de ROSENBLATT.

Dans [17] et [18] je me suis intéressé à l'estimabilité sans biais d'une famille $\mathcal{D}$ de densités. J'ai montré, en gros, que la densité est ESB si et seulement si l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{D}$ est à **noyau reproduisant**. Ce théorème contient le résultat ultérieur d'IBRAGIMOV-KHASMINSKI (cf. [40] p. 20). Il s'étend à d'autres paramètres fonctionnels et notamment la régression. Enfin on peut montrer l'existence d'un estimateur sans biais optimal sous des conditions légèrement plus faibles que la complétude.

Maintenant, si $\mathcal{D}$ est l'ensemble de toutes les densités par rapport à $\mu$ mesure $\sigma$-finie, des considérations de théorie de la mesure m'ont permis d'établir que la densité est ESB si et seulement si $\mu$ est **purement atomique**.

Par ailleurs [14] contient des résultats simples sur l'existence d'un estimateur sans biais d'opérateur de covariance minimum pour un paramètre Hilbertien, ainsi que plusieurs inégalités du type CRAMER-RAO pour un tel paramètre.

# 2 Estimateurs convergents

J'ai étudié dans ma thèse **l'existence** et la **construction** d'un estimateur convergent pour un paramètre à valeurs dans un espace métrique. Les résultats sont voisins de ceux de LE CAM-SCHWATZ (1964) mais la construction de l'estimateur, plus explicite, fait apparaître une vitesse de convergence (cf. [7] p. 23-36).

# 3 Estimation de la densité (cas de l'échantillon)

J'ai commencé dans [7] l'étude de l'estimateur de la densité par **projection** : convergence en moyenne quadratique et en moyenne quadratique intégrée, convergence uniforme presque sûre, normalité asymptotique, vitesse de convergence, choix optimal de l'indice de troncature, cas des fonctions trigonométriques, cas des fonctions d'Hermite. Des résultats complémentaires et des discussions figurent dans [17], [24] et [40].

Par la suite j'ai étudié la classe des estimateurs de la densité de la forme

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{r_n}(x, X_i) \quad , \; x \in E$$

où $(X_i)$ est un échantillon de taille $n$ et $(K_r)$ une famille de noyaux généralisés, $E$ un espace métrique.

Cette classe contient les **estimateurs à noyau**, l'**histogramme** et les **estimateurs par projection**.

En collaboration avec J. BLEUEZ j'ai obtenu des **conditions nécessaires et suffisantes de convergence simple**, et de **convergence uniforme** pour $f_n$ ainsi qu'un **encadrement** de $P\left(\sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\right)$ sous des hypothèses générales.

De plus nous montrons que tous les modes de convergence usuels sont ici **équivalents** (par exemple la convergence uniforme en probabilité entraîne la convergence uniforme presque sûre). Ce phénomène avait déjà été observé par J. GEFFROY pour la méthode du noyau.

En utilisant une minoration serrée on peut montrer que ces résultats s'appliquent à l'estimateur par projection quand le système orthonormal est constitué par les fonctions trigonométriques ou les fonctions d'Hermite. Le cas des **fonctions de Haar** se traite facilement.

Les résultats sont annoncés dans [15], [16] et démontrés dans [21], [22].

Notons enfin que ces méthodes peuvent s'appliquer à l'estimation par **ondelettes**.

Récemment je suis revenu sur la méthode par projections en introduisant un estimateur de la forme $\widehat{f_n} = \sum_{j=0}^{\widehat{k}_n} \widehat{a}_{j_n} e_j$ où $(e_j)$ est un système orthonormal dans un espace $L^2(E, \mathcal{B}, \mu)$ où $\mu$ est une Probabilité, $(\widehat{a}_{j_n})$ les coefficients de Fourier empirique de $f$ et $\widehat{k}_n$ un indice de troncature. On montre alors que $\widehat{k}_n$ atteint les vitesses suroptimales $\frac{1}{n}$ (en erreur quadratique intégrée) et $\left(\frac{\ln\ln n}{n}\right)^{1/2}$ (en convergence uniforme presque sûre) sur un ensemble dense dans la classe des densités à estimer (cf [103], [104]).

J'ai ensuite généralisé ces résultats à toute une classe de paramètres fonctionnels (cf [120]) ; voir aussi AUBIN-IGNACOLO (preprint).

# 4 Estimation de paramètres fonctionnels

En 1969 j'ai défini et étudié une classe d'estimateurs pour la **densité conditionnelle** et la **régression**. Les résultats sont annoncés dans [6] et établis dans [8].

Des travaux de la même époque concernent l'estimation du **mode**, de la **fonction de répartition**, des **dérivées de la densité** et de la **fonction frontière** du support d'une loi de Probabilité (cf. [3], [5], [7], [8]).

Plus récemment l'estimation adaptative de la densité spectrale est abordée dans [120].

# 5 Tests non paramétriques (tests Hilbertiens)

On peut interpréter le **test du $\chi^2$** en le considérant comme basé sur une distance entre l'histogramme et une approximation de la densité ; mais l'histogramme lui même est un estimateur de la densité basé sur un système orthogonal constitué par des indicatrices. Il est donc naturel de chercher à remplacer ce système par des fonctions plus lisses (éventuellement affectées d'un poids).

Pour cela j'ai considéré des fonctions $K_n$ de la forme

$$K_n = \sum_{j \in J_n} \lambda_{j_n} e_{j_n} \otimes e_{j_n}$$

où $\sum \lambda_{j_n}^2 < \infty$, $J_n$ est un ensemble d'indices fini ou dénombrable, $(e_{j_n})$ est un système orthogonal de $L^2(\mu)$ où $\mu$ est la loi à tester.

Le test est alors basé sur la norme de la statistique fonctionnelle

$$S_n(\cdot) = \sqrt{n}[\int K_n(x, \cdot)\, d\mu_n(x) - 1]$$

où $\mu_n$ est la mesure empirique associée à un échantillon de taille $n$, la région critique étant de la forme $\| S_n \|^2 > c_n$.

J'ai fait une étude très détaillée de cette classe de tests dans [19], [20], [26], [27], [28], [32] et [45]).

J'ai d'abord étudié la convergence de ces tests sous des hypothèses générales.

Puis en me basant sur une inégalité de BERRY-ESSEN multidimensionnelle due à SAZONOV j'ai obtenu **des lois limites** pour $\| S_n \|^2$ d'abord sous l'hypothèse nulle, avec des **vitesses de convergence**, puis sous des hypothèses **adjacentes** (l'adjacence est une variante de la contiguïté) avec également des vitesses. Ces lois limites dépendent de la structure asymptotique de la suite $(K_n)$.

J'ai ensuite étudié l'**efficacité asymptotique** de ces tests en déterminant notamment le test asymptotiquement le plus puissant dans une classe donnée et pour une suite d'alternatives spécifiées.

D'autre part j'ai déterminé l'efficacité asymptotique du **test de NEYMAN-PEARSON** sous des hypothèses adjacentes et j'en ai déduit l'efficacité asymptotique **absolue** de ces "tests Hilbertiens".

Les résultats précédents permettent de **choisir** le noyau $K_n$ en fonction de la classe d'alternatives envisagée.

Plus récemment (2000) j'ai étudié l'efficacité de Bahadur de ces tests.

Enfin des **simulations** montrent la supériorité de ces tests sur le test du $\chi^2$ usuel. Il est à noter que NEYMAN, en 1937 !, avait fait des simulaton sur un test analogue utilisant les Polynômes de Legendre.

Je travaille actuellement sur une version tronquée de ces tests (2001, 2002).

# 6 Valeurs extrêmes d'un échantillon multidimensionnel

Dans [8] j'ai étudié le nombre $Y_n$ d'éléments maximaux d'un échantillon à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. J'ai obtenu la loi $P_n$ de $Y_n$ et j'ai étudié certaines propriétés asymptotiques de $P_n$. En utilisant un théorème de J. GEFFROY j'en ai déduit un estimateur convergent de la partie maximale du support de la loi des variables de l'échantillon.

# 7 Inégalités de type exponentiel pour les processus

En 1975 j'avais établi dans [13] une inégalité de type BERNSTEIN pour les sommes partielles d'un processus stationnaire et $\varphi$-mélangeant.

Ce résultat a été amélioré par G. COLLOMB, et divers auteurs ont montré des inégalités de ce type, notamment pour l'$\alpha$-mélangeance.

Je suis revenu sur la question récemment, en adaptant une technique de couplage due à BRADLEY et légèrement améliorée par RHOMARI j'ai obtenu le résultat suivant : soit $(Y_{t'}t \in \mathbb{Z})$ un processus réel centré tel que $\sup\limits_{1\leq t\leq n} \parallel Y_t \parallel_\infty \leq b$, alors pour tout entier $q \in \left[1, \dfrac{n}{2}\right]$ et tout $\varepsilon > 0$

$$P(|Y_1 + \ldots + Y_n| > n\varepsilon) \leq 4\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{8V^2(q)}q\right) + 22\left(1+\frac{4b}{\varepsilon}\right)^{1/2} q\alpha\left(\left[\frac{n}{2q}\right]\right) \qquad (1)$$

où $v^2(q) = \frac{2}{p^2}\sigma^2(q) + \frac{b\varepsilon}{2}$ avec $p = \frac{n}{2q}$ et

$$\sigma^2(q) = \max_{0 \le j \le 2q-1} V(Y_{[jp]+1} + \ldots + Y_{[(j+1)p+1]}) .$$

et o $\alpha(\cdot)$ désigne le coefficient de forte mélangeance de $(X_t)$. Ce majorant, complètement explicite, permet d'obtenir des vitesses optimales de convergence dans les problèmes d'estimation non paramétriques en temps discret ou continu. J'ai obtenu une inégalité analogue dans le cas **non borné**.

Ces résultats figurent dans [76] et sont des améliorations de résultats obtenus dans [53] et [65].
Une application au **modèle de régression avec bruit corrélé** apparaît dans [65]. Des applications l'estimation non paramétrique apparaissent notamment dans [76]. Il est à noter que sous des hypothèses de mélangeance convenables l'inégalité (1) permet d'obtenir les mêmes vitesses que dans le cas i.i.d.

Plus récemment j'ai obtenu des inégalités uniformes (2000) qui sont utilisées dans [101].

# 8 Estimation de paramètres fonctionnels dans les processus à temps discret

a) Dans [9] et [13] apparaissent des résultats sur l'**estimation de la densité** d'un processus $\varphi$-mélangeant, la méthode utilisée est celle des fonctions orthogonales et la convergence est uniforme presque sûre.

   J'ai traité le cas d'un processus $\alpha$-mélangeant dans [42], [43] et [44] notamment. Les résultats de convergence uniforme presque sûre sont obtenus pour la classe générale d'estimateurs définie au 3 avec des améliorations pour l'estimateur noyau et l'estimateur par projection.

b) Dans [43] et [44] j'étudie également l'**estimateur de la régression** défini par

$$m_n(x) = \sum_{t=1}^{n} Y_t K_{r_n}(x, X_t) / \sum_{t=1}^{n} K_{r_n}(x, X_t) \quad ,$$

   $x \in \mathbb{R}^s$, où $(X_t, Y_t)$, $1 \le t \le n$ sont des observations d'un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^{s+1}$ strictement stationnaire et géométriquement fortement mélangeant.

   J'obtiens notamment une **convergence uniforme preque sûre sur une suite de boules fermées de $\mathbb{R}^s$ dont le rayon tend vers l'infini avec $n$** alors que la littérature ne considère que la convergence uniforme sur un compact fixe (cf. GYORFI-HARDLE-SARDA-VIEU (1989)). Cette propriété est importante pour les applications à la prévision.

c) J'ai consacré un certain nombre de travaux à l'**estimation d'un filtre (non linéaire)**, c'est un problème voisin du précédent mais le modèle et la méthode d'estimation sont différents.

J'ai étudié les modèles suivants :

$$Y_t = \varphi(X_t) + \varepsilon_t \quad , \quad t \in \mathbb{Z}$$

où $(\varepsilon_t)$ est un bruit légèrement corrélé avec $(X_t)$ ;

$$Y_t = \varphi(X_t, \ldots, X_{t-k}) \ \ , \ t \in \mathbb{Z}$$

et

$$Y_t = \varphi(X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) \ \ , \ t \in \mathbb{Z} \ .$$

L'estimateur est obtenu en **maximisant partiellement un estimateur de la densité**.

Ainsi, dans le second modèle, on considère un estimateur $f_n(x, y)$ de la densité du vecteur $(X_t, \ldots, X_{t-k}, Y_t)$, cet estimateur $f_n(x, y)$ de la densité du vecteur $(X_t, \ldots, X_{t-k}, Y_t)$, cet estimateur **devient infini** au voisinage de la variété d'équation $y = \varphi(x_0, \ldots, x_k)$ et tend vers 0 à l'extérieur de cette variété. On est donc amené à définir $\varphi_n$ en posant

$$f_n(x, \varphi_n(x)) = \max_{y \in \mathbb{R}} f_n(x, y) \ \ , \ x \in \mathbb{R}^{k+1} \ .$$

J'ai obtenu la convergence uniforme presque sûre avec des vitesses précises et la convergence $L^p$ de $\varphi_n$ sous des hypothèses de mélangeance. J'ai également montré la convergence d'un estimateur de $k$ construit en remarquant que la loi de $(Y_t, X_t, \ldots, X_{t-k}, X_{t-k-1})$ n'est pas singulière alors que celle de $(Y_t, X_t, \ldots, X_{t-k})$ l'est.

Le troisième modèle se traite en écrivant une décomposition de la forme

$$Y_t = \varphi_n\left(X_t, \ldots, X_{t-k_n}\right) + \varepsilon_{t_n} \ \ , \ t \in \mathbb{Z}, \ n \geq 1$$

ce qui permet d'utiliser la méthode précédente. Le problème est amusant car on obtient (difficilement !) un estimateur convergent pour une fonction à une infinité de variables. Le résultat s'applique à l'**estimation des coefficients d'un processus de VOLTERRA**, i.e. un processus de la forme

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X_{t-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{j'=0}^{\infty} b_{jj'} X_{t-j} X_{t-j'} + \ldots$$

Les références qui correspondent à l'estimation d'un filtre sont [29], [31], [34], [35], [38], [47], [68], [76] et [79].

Des simulations (LESSI 1992) montrent que la méthode est efficace. Par ailleurs une extension au cas où $Y_t$ est perturbé par un "petit bruit" apparaît dans [83].

d) En 1993 j'ai montré dans [63] que sous des conditions simples et générales l'erreur quadratique asymptotique de l'estimateur à noyau de la densité et de l'autorégression d'un processus stationnaire est la même que dans le cas i.i.d. Les démonstrations ont paru dans [71]. Des résultats analogues pour la convergence uniforme presque sûre apparaissent dans [76]. Voir aussi [94].

# 9 Prévision d'un processus à temps discret

a) Dans [25] et [33] j'ai étudié la prévision non paramétrique d'un processus mélangeant lorsque seules les corrélations entre les variables observées sont inconnues. L'utilisation du coefficient de GASTWIRTH-RUBIN permet de couvrir les mélangeances usuelles.

J'ai obtenu une majoration de l'erreur quadratique du prédicteur et, dans un cas particulier, une condition nécessaire et suffisante de convergence. Les variables observées sont à valeurs dans un espace de Hilbert ; ce degré de généralité permet d'envisager une application intéressante : en plongeant l'espace des mesures bornées à signe dans un espace de Hilbert (méthode de GUILBART) on obtient un "prédicteur" de la loi conditionnelle du futur par rapport au présent et au passé du processus.

Enfin la robustesse de cette méthode permet de montrer qu'elle reste performante quand la loi est estimée.

b) Plus récemment j'ai étudié une classe générale de prédicteurs pour un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^s$. Ces prédicteurs sont construits à partir de l'estimateur de la régression $m_n$ défini dans 8.b. La propriété de convergence indiquée dans ce paragraphe joue un rôle crucial et permet d'obtenir la **convergence du prédicteur** sous diverses hypothèses (cf. [43] et [44]). Pour des vitesses précises voir [76].

Des simulations et des prévisions sur données réelles effectuées par CARBON-DELECROIX ayant montré la **robustesse** du prédicteur quand le processus est perturbé par une saisonnalité, j'ai essayé d'interpréter ce phénomène d'une façon théorique. Pour cela j'ai considéré le modèle

$$X_t = Y_t + s(t) \quad , \ t \in \mathbb{Z}$$

où $(Y_t)$ est strictement stationnaire (non observé), $s$ est déterministe, presque périodique et inconnue et $(X_t)$ est observé. J'ai alors montré que $\boldsymbol{m_n}$ **convergeait vers une "autorégression moyenne"** ce qui explique en partie la robustesse de la méthode. Ce résultat a paru dans [54].

Il est à noter que de nombreux résultats numériques montrent que cette méthode non paramétrique semble meilleure que les méthodes usuelles de prévision développées par BOX-JENKINS.

Enfin la prévision en présence de **variables exogènes** est étudiée dans [88].

# 10 Contribution à la Théorie générale de la prévision

Dans [119], j'étudie des conditions d'**optimalité** pour des **prédicteurs statistiques sans biais** et, à partir d'une extension de l'**inégalité de type Cramer-Rao** due à Yatracos, je montre l'existence de **prédicteurs sans biais efficaces** pour des modèles de type exponentiel. Cependant, dans certains cas (processus d'Ornstein-Uhlenbeck) il y a une infinité de prédicteurs sans biais mais aucun n'est efficace.

[119] est consacré à l'étude asymptotique des prédicteurs statistiques. On obtient des vitesses de convergence (éventuellement minimax) et des lois limites pour des prédicteurs plug-in. Parmi les applications on peut citer la construction d'intervalles de prévision asymptotiques pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

# 11 Statistique des processus à temps continu (Méthode directe)

a) L'extension des résultats de 9.a à un processus à temps continu est étudiée dans [37] (article en collaboration avec M. DELECROIX) où nous obtenons la convergence d'un prédicteur non paramétrique pour un processus mélangeant à temps continu.

b) Y. KUTOYANTS, T. MOURID et moi avons étudié dans [56] et [57] le modèle de **diffusion avec retards** défini par l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon &= \left(\sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-b_i}^\varepsilon\right) dt + \varepsilon dw_t \ , \ 0 \le t \le T \\ X_S^\varepsilon &= x_0 \ \ , -k \le s \le 0 \end{cases}$$

Il s'agissait d'estimer le paramètre $\theta = (a_1, \dots, a_p \ ; \ b_1, \dots, b_p)$ dans le cadre des petites diffusions c'est-à-dire lorsque $\varepsilon$ tend vers 0.

En utilisant la normalité asymptotique locale des lois de $(X_t^\varepsilon)$ nous montrons que l'estimateur **maximum de vraisemblance** de $\theta$ est convergent, asymptotiquement normal et asymptotiquement efficace. Nous établissons des propriétés analogues pour les **estimateurs bayésiens**.

c) Depuis 1993 j'ai commencé à étudier l'erreur quadratique des estimateurs fonctionnels pour un processus à temps continu.

Lorsqu'on observe $(X_t, \ 0 \le t \le T)$ j'ai montré que la vitesse optimale **(minimax)** d'un estimateur de la densité ou de la régression est de l'ordre de $T^{-4/(s+4)}$ ($s$ désigne la dimension) lorsque le comportement local de $(X_t)$ n'apporte aucune information sur le paramètre inconnu (les autres hypothèses sont usuelles).

J'ai également obtenu la **vitesse superoptimale $\boldsymbol{T^{-1}}$** pour un **estimateur de la densité** sous des hypothèses un peu plus générales que CASTELLANA-LEADBETTER. De plus j'ai montré que **cette vitesse est également atteinte par un estimateur de la régression.**

Par ailleurs [81] indique des vitesses exactes pour l'estimateur de la densité dans le cas Gaussien : l'erreur quadratique est en $\frac{1}{T}$ si les trajectoires sont irrégulières et en $\frac{\ln T}{T}$ sinon. Avec D. BLANKE nous venons d'établir la **minimaxité** de ces vitesses ainsi que celles des **vitesses intermédiaires** (cf. [98]).

Enfin j'ai mis en évidence des conditions permettant d'obtenir des vitesses intermédiaires entre $T^{-4/(s+4)}$ et $T^{-1}$.

Par ailleurs mon élève N. CHEZE-PAYAUD et moi-même avons traité le cas où les observations sont échantillonnées par un procédé déterministe ou aléatoire. Sous de larges hypothèses nous avons montré que l'erreur quadratique asymptotique de l'estimateur à noyau de la régression est $cn^{-4/(s+4)}$ où $c$ est la même constante que dans le cas i.i.d. L'utilisation d'inégalités de type exponentiel (cf. [65]) permet de débloquer la démonstration lorsque les observations ne sont pas supposées bornées.

L'ensemble des résultats exposés dans le présent paragraphe figure dans [66], [67], [69], [95].

d) Plus récemment (1994-95) j'ai complété ces résultats sur l'échantillonnage en montrant que la vitesse suroptimale peut être conservée par un échantillonnage convenable. En revanche l'échantillonnage dichotomique (à des instants $j/2^N$, $1 \leq j \leq N$ ; $N \to +\infty$) engendre ici un estimateur divergent ! (Cf. [74]).

e) En 1994-95 je me suis également intéressé à la convergence uniforme presque sûre : des vitesses usuelles de l'ordre de $\ln_m T \cdot \left(\frac{\ln T}{T}\right)^{\frac{r}{2r+s}}$ ($r$ est la régularité de la densité à estimer) sont atteintes pour des processus à trajectoires régulières. Pour des processus à trajectoires irrégulières le phénomène de vitesse superoptimale resurgit avec le résultat suivant : pour tout entier $m$

$$\frac{1}{\ln_m T}\left(\frac{T}{\ln T}\right)^{1/2} \sup_{x \in \mathbb{R}^s} |f_T(x) - f(x)| \to 0 \text{ p.s. quand } T \to +\infty$$

où $f_T$ est l'estimateur à noyau de la densité.
Ce résultat est annoncé dans [73] et démontré dans [76]. Ce livre contient également des **vitesses superoptimales pour les prédicteurs non paramétriques**.

Les principaux résultats de c), d), e) ont été publiés dans Annals of Statistics en 1997 (cf. [82]).

f) Par ailleurs avec D. BLANKE nous avons étudié la **famille des vitesses intermédiaires** entre vitesse optimale et vitesse superoptimale. Nous avons établi que toutes ces vitesses sont minimax en un sens spécifique (cf. [98]).

g) Depuis 1996 j'étudie le lien entre l'existence d'un **temps local** et celle d'estimateurs non paramétriques qui convergent à vitesse superoptimale.

Récemment Y. KUTOYANTS a montré que si le processus observé est une diffusion dont le coefficient de diffusion $\sigma(\cdot)$ est connu il existe un estimateur sans biais de la densité, basé sur le temps local de $X$.

J'ai montré dans [86] que ce type de résultat était valide dans un cadre beaucoup plus général et qu'en particulier on pouvait s'affranchir de la condition "$\sigma(\cdot)$ connu".

En fait, sous certaines conditions de régularité, on montre que l'**existence d'un temps local de carré intégrable est équivalente à celle d'un estimateur qui converge à la vitesse superoptimale** et que, dans ce cas, on peut construire un **estimateur sans biais de la densité**.

La loi limite et la loi fonctionnelle du logarithme itéré pour l'estimateur temps local est obtenue dans [86].

D'autre part dans un travail commun avec Y. DAVYDOV ([92]) nous avons étudié différents types de convergences pour l'estimateur temps local. Certains résultats sont similaires aux résultats obtenus pour l'estimateur à noyau. Cependant deux propriétés sont significatives :

1) Sous une simple hypothèse d'ergodicité l'estimateur temps local converge (p.s.) pour la norme $L_1$ et par conséquent la mesure empirique converge en variation vers la mesure théorique. Une propriété non vérifiée en temps discret !

2) L'erreur quadratique est en $\dfrac{1}{T}$ pour toute la classe des densités continues ce qui n'a pas lieu pour un estimateur à noyau donné.

h) En 2003, j'ai étudié un estimateur par projection adaptative en temps continu. Cet estimateur atteint une vitesse suroptimale pour certaines familles de densités même quand la condition de Castellana-Leadbetter n'est pas vérifiée (cf [113], coll. D BLANKE).

# 12 Statistique des processus à temps continu (Méthode fonctionnelle)

Considérons un processus réel à temps continu observé sur $n$ intervalles successifs de longueur $\delta$. Il est naturel de considérer les observations comme des variables aléatoires **corrélées** $X_1, \ldots, X_n$ à valeurs dans un espace de fonctions définies sur $[0, \delta]$. Cette interprétation, tout à fait classique, n'est presque jamais envisagée par les Statisticiens. Les rares auteurs qui l'ont utilisé ont supposé les $X_i$ indépendantes et de même loi ce qui restreint beaucoup le champ des applications (cf. U. GRENANDER - Abstract Inference - Wiley (1989)).

La représentation précédente permet de traiter de nombreux problèmes, par exemple la prévision de l'**évolution future d'un processus sur tout un intervalle de temps**.

Pour préciser cette représentation j'ai considéré le **modèle autorégressif Banachique** (ARB) défini par

$$X_n - a = \rho(X_{n-1} - a) + \varepsilon_n \quad , \, n \in \mathbb{Z}$$

où $(\varepsilon_n)$ est un bruit blanc (fort) à valeurs dans l'espace de Banach $B$, $a$ un élément de $B$, $\rho$ un opérateur sur $B$ tel que $\sum_{n\geq 0} \| \rho^n \| < +\infty$.

J'ai étudié en détail ce modèle, d'abord dans un cadre Hilbertien ([49], [50], [51], [52], [55]) puis dans un cadre Banachique ([62], [65] (en cours)). [46] et [48] abordent des problèmes connexes et [60] traite la mise en œuvre et les applications.

Pour un autorégressif Hilbertien centré (ARH) j'ai montré la convergence à vitesse exponentielle des opérateurs de covariance empiriques et de leurs éléments propres vers les paramètres théoriques correspondants, la norme utilisée étant celle de HILBERT-SCHMIDT. En projetant les observations sur un sous-espace adéquat on en déduit un estimateur de l'opérateur d'autocorrélation $\rho$ puis un prédicteur qui converge à vitesse exponentielle.

La méthode d'estimation de $\rho$ s'apparente à celle des SIEVES de GRENANDER mais dans un cadre non paramétrique car on n'a pas besoin de supposer le modèle dominé. Les simulations et les applications donnent des résultats prometteurs.

Un de mes élèves (PUMO) a travaillé sur la prévision d'un ARB. Un autre (MOURID) a étudié les ARB d'ordre supérieur à 1. L'étape suivante est l'étude des processus linéaires Banachiques. Cette étude a été réalisée récemment par F. MERLEVEDE.

Dans [62] j'ai établi des lois des grands nombres (avec vitesse de convergence dans un espace de Banach de type 2, donc dans un espace de Hilbert), le théorème central limite et la **loi du logarithme itéré** pour les ARB. Une forme définitive de ce travail est publiée dans [78].

Les processus réels à temps continu possédant une représentation ARB sont nombreux car on peut engendrer le bruit blanc $(\varepsilon_n)$ à partir de n'importe quel processus réel à accroissement indépendants et stationnaires.

Dans [62] je donne une condition suffisante pour qu'un processus réel de la forme

$$\xi_t = \int_{-\infty}^{t} g(t-s)dw(s)$$

($w$ est un processus de Wiener, $g \in L^2(\mathbb{R})$) admette une représentation ARB. Le critère s'applique au processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK et à des processus solutions d'une équation différentielle stochastique linéaire d'ordre $k$. Ainsi dans [71] j'ai obtenu facilement la loi du logarithme itéré pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Enfin considérons un processus réel à temps continu $(\eta_t,\ t \in \mathbb{R})$ qui s'écrit

$$\eta_t = a(t) + \xi_t \quad , \ t \in \mathbb{R}$$

où $(\xi_t)$ est un processus réel centré admettant une représentation ARB avec $B = C[0, \delta]$ et $a$ est une fonction continue **périodique** de période $\delta$, alors $(\eta_t)$ admet une représentation ARB et les théorèmes limites de [62] permettent d'estimer $a$ et de tester l'hypothèse $a = 0$.

L'application des ARB à la prévision de séries concrètes (consommation d'électricité, séries financières, circulation, électrocardiogrammes) se développe (notamment à BOLOGNE, PADOUE, TOULOUSE et ANGERS).

Récemment de nouveaux résultats théoriques (MERLEVEDE) et des applications (notamment aux électrocardiogrammes (BERNARD) et à "el n$\tilde{i}$no" (CARDOT)) m'ont amené à revenir sur ces questions (cf. [92], [93], [96], [100]) ; j'ai préparé un livre qui fait le point de la théorie ([99], chez Springer) et qui contient de nombreux résultats nouveaux parmi lesquels ceux qui sont annoncés dans [96], [97].

Ce livre qui a paru en 2000 contient une théorie générale des processus autorégressifs fonctionnels. Les vitesses de convergence des théorèmes limites sont **optimales** et ne font plus appel à des propriétés de mélangeance mais plutôt à la structure du modèle. Le résultat annoncé dans [100] est crucial car il montre que si $(X_i, i \in \mathbb{Z})$ est un $ARH(1)$ alors $(X_i \otimes X_i,\ i \in \mathbb{Z})$ est un $AR\mathcal{S}(1)$ où $\mathcal{S}$ est l'espace de Hilbert des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $H$, le bruit associé étant une différence de martingale Hilbertienne. Ceci permet d'obtenir des résultats asymptotiques optimaux pour l'opérateur de covariance empirique associé à $X_1, \ldots, X_n$. A ce sujet voir [101] où des améliorations apparaissent et [111] pour un article de "vulgarisation".

Je m'intéresse maintenant aux moyennes mobiles Hilbertiennes (cf. [114] et [117]) et plus généralement aux processus linéaires Hilbertiens (cf. [110]) dont j'étudie une définition générale basée sur la prévision. La note [112] (2003) donne cette nouvelle définition et étudie ses conséquences, elle est développée dans [116] et [122]. J'étudie également les produits tensoriels de processus linéaires hilbertiens dans [128].

# 13 Travaux divers

a) **Probabilités qualitatives**

Les probabilités qualitatives (P.Q.) et leurs compatibilité avec des Probabilités quantitatives jouent un rôle important dans certains aspects de l'économétrie (voir les travaux de DEBREU, prix Nobel d'Economie) et en Statistique Bayésienne (voir les travaux de SAVAGE).

Je me suis intéressé à ce sujet dans [10], [11] et [12].

J'ai d'abord établi un théorème de prolongement d'une P.Q. en une P.Q. compatible avec une Probabilité quantitative.

J'ai ensuite répondu à une question de L. SAVAGE qui posait le problème de la **définition d'une indépendance qualitative**. J'ai comparé cette indépendance à l'indépendance stochastique et à l'indépendance ensembliste et j'ai obtenu un **critère qualitatif d'indépendance stochastique**.

Comme application j'ai montré notamment que si deux variables aléatoires $X$ et $Y$ ont même loi qualitative et sont telles que $X$ est qualitativement indépendante de $Y$ et $X+Y$ est qualitativement indépendante de $X-Y$ alors elles sont **Gaussiennes**, de même loi, et stochastiquement indépendantes.

b) **Simulation**
Avec mon élève D. SMILI nous avons comparé dans [57] trois méthodes de simulation d'un bruit blanc Gaussien en utilisant un critère un peu différent des critères usuels. En effet les variables simulées $\widehat{\varepsilon}_1, \ldots, \widehat{\varepsilon_n}$ sont inévitablement corrélées, mais il est naturel de demander au processus $(\widehat{\varepsilon}_n)$ d'être Gaussien ce qui se traduit ici par la **linéarité de l'autorégression**. Dans ce contexte la méthode d'approximation normale se révèle plus performante que la méthode d'inversion et la méthode de BOX-MULLER.

c) J'ai entamé des Recherches sur les **chaos** en 1992.
Considérons un système dynamique de la forme

$$X_t = \varphi(X_{t-1}) \;\; ; \;\; t = 1, 2, \ldots$$

où $\varphi$ et la Probabilité invariante $\mu$ sont inconnues. On peut construire des estimateurs convergents de $\varphi$ et $\mu$ (cf. [72]). Sous certaines hypothèses l'erreur quadratique d'un estimateur de la densité de $\mu$ est alors un $O\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{4/(s+4)}\right)$ au lieu de $O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{4/(s+4)}\right)$ pour des v.a. i.i.d. (cf. [71]).

Par ailleurs l'estimation de $d$ dans le modèle

$$X_t = \varphi(X_{t-1}, \ldots, X_{t-d}) \;\; , \;\; t \geq d$$

est étudiée dans [70]. Un modèle analogue avec "petit bruit" est envisagé dans [83] et [102].

# TRAVAUX ET PUBLICATIONS

**1964** **1.** Sur la dépendance limite entre variables aléatoires.
Thèse 3è cycle - Paris, 58 p.

**1968** **2.** Sur les éléments extrémaux d'un échantillon vectoriel.
CRAS, 266, 570-572.

**3.** Sur l'estimation d'une fonction continue.
CRAS, 266, 837-838.

**1969** **4.** Sur l'estimation d'une densité multivariée par une série de fonctions orthogonales.
CRAS, 268, 555-557.

**5.** Estimation non paramétrique de la densité et de ses dérivées.
CRAS, 269, 1010-1012.

**6.** Estimation de la densité conditionnelle et de la régression.
CRAS, 269, 661-664.

**1970** **6 bis.** Complément à deux notes sur l'estimation de la densité et de ses dérivées.
CRAS, 271, 45.

**7.** Contribution à la théorie de l'estimation fonctionnelle I.
Publ. Inst. Stat. Univ. Paris XIX, 2, p. 1-96.

**8.** Contribution à la théorie de l'estimation fonctionnelle II.
Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, XIX, 3, p. 99-177.

**1971** **8 bis.** Contribution à la théorie de l'estimation fonctionnelle.
Thèse de Doctorat d'Etat soutenue à l'Université Pierre et Marie Curie le 17 février 1971.
**2è thèse :** Equations différentielles stochastiques aux dérivées partielles.

**1973** **9.** Estimation de la densité d'un processus stationnaire et mélangeant
CRAS, 277, 535-538.

**1974** **10.** Indépendance ensembliste, indépendance qualitative, indépendance stochastique.
CRAS, 278, 159-161.

**11.** Forme qualitative d'un critère de normalité de S.N. Bernstein.
CRAS, 279, 959-962.

**1975** **12.** Une définition qualitative de l'indépendance et ses applications.
Ann. Inst. Henri Poincaré, XI, 3, 225-252.

**13.** Inégalité de Bernstein pour les processus stationnaires et mélangeants. Applications.
CRAS, 281, 1095-1098.

**1976** **14.** Sur l'estimation d'un paramètre à valeurs dans un espace de Hilbert.
Publ. interne UER Maths. Univ. Lille I, 70, 14 p.

**15.** Conditions nécessaires et suffisantes de convergence pour une classe d'estimateurs de la densité (en coll. avec J. BLEUEZ).
CRAS, 282, 63-66.

**16.** Conditions nécessaires et suffisantes de convergence de l'estimateur de la densité par la méthode des fonctions orthogonales. (en coll. avec J. BLEUEZ).
CRAS, 282, 1023-1026.

**1977** **17.** Sur l'estimation sans biais d'un paramètre à valeurs dans $L^2(\mu)$ et sur le choix d'un estimateur de densité.
CRAS, 284, 85-88.

**18.** Sur l'estimation sans biais d'un paramètre fonctionnel.
Publ. interne UER Maths. Univ. Lille I, 125, 39 p.

**1978** **19.** Tests d'ajustement Hilbertiens.
Publication interne UER Maths. Univ. Lille I, 125, 39 p.

**20.** Tests Hilbertiens et test du $\chi^2$.
CRAS, 286, 945-948.

**21.** Etude d'une classe d'estimateurs non paramétriques de la densité (en coll. avec J. BLEUEZ).
Ann. Inst. Henri Poincaré, XIV, 4, 479-498.

**21 bis.** Study of a class of density estimators. Recent developments in Statistics.
Barra and al. editors North Holland, invited papers p. 243-244.

**1979** **22.** Conditions nécessaires et suffisantes de convergence de l'estimateur de la densité par la méthode des fonctions orthogonales (en coll. avec J. BLEUEZ).
Revue Roumaine de Mathématiques pures et appliquée, XXIV, 6, 869-886.

**23.** Prédiction non paramétrique d'un processus stationnaire.
Publ. interne UER Maths Lille I, 150, 28 p.

**1980** **24.** Estimation de la densité par projection sur un sous-espace de dimension finie.
Portugaliae Mathematica, 37, 1-2, 93-111.

**25.** Une méthode non paramétrique de prédiction d'un processus stationnaire. Prédiction d'une mesure aléatoire.
CRAS, A, 290, 711-713.

**26.** Sur une classe de tests qui contient le test du $\chi^2$.
Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, XXV, 1-2, 1-16.

**1981** **27.** Comportement asymptotique des tests Hilbertiens de dimension infinie sous des hypothèses adjacentes.
Publ. IRMA Univ. Lille I, 3, 6, 22 p.

**28.** Efficacité asymptotique des tests Hilbertiens et du test de Neyman-Pearson sous des hypothèses adjacentes.
CRAS, A, 293, 91-93.

**28 bis.** Comportement asymptotique des tests Hilbertiens sous des hypothèses adjacentes.
Actes 43è session ISI, Buenos-Aires, II, 109-112.

**1982** **29.** Remarques sur l'estimation dans le modèle $Y_t = \phi(X_t) + \varepsilon_t$.
Publ. IRMA Univ. Lille I, 4, 3, 18 p.

**30.** Nonparametric prediction in stationary processes.
Lecture Notes in Statistics, 16, 69-84.

**1983** **31.** Sur l'estimation non paramétrique d'une moyenne mobile non linéaire I.
Publ. IRMA Univ. Lille I, 5, 1, 16 p.

**32.** Lois limites et efficacité asymptotique des tests Hilbertiens de dimension finie sous des hypothèses adjacentes.
Statist. et Anal. des Données, 8, 1, 1-40.

**33.** Sur la prédiction non paramétrique de variables aléatoires et de mesures aléatoires.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete, 64, 541-553.

**34.** Sur l'estimation non paramétrique
d'une moyenne mobile non linéaire II.
Publ. IRMA Univ. Lille I, 5, 5, 17 p.

**1984** **35.** Sur l'explosion d'un estimateur de la densité. Application à l'estimation non paramétrique d'un filtre non linéaire.
CRAS, 298, I, 13, 309-312.

**1985** **36.** Sur l'explosion d'un estimateur de la densité.
Application à l'estimation non paramétrique d'un filtre non linéaire.
Actes de la 4 rencontre Franco-Belge de Statistique, 79-91.

**37.** Prediction of a Hilbert valued random variable. (en coll. avec M. DELECROIX).
Stochastic Processes and their applic., 19, 271-280.

**1986** **38.** Estimation non paramétrique d'un filtre réalisable d'ordre infini.
Publ. IRMA Univ. Lille I, 4, 10, 17 p.

**39.** Quelques résultats récents sur la prédiction non paramétrique d'un processus.
Cahiers de CERO, 28, 1-2-3, 11-18.

**1987** **40.** **Théorie de l'estimation fonctionnelle.**
(en coll. avec J.P. LECOUTRE). Economica ed., 342 p.

**41** Etude d'un filtre linéaire d'ordre infini.
Publ. LSTA Univ. Paris VI, 17 p.

**42.** La Statistique non paramétrique des processus.
Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 45, 2, 1-24.

**1988** **43.** Prévision non paramétrique d'un processus stationnaire non borné.
Publ. LSTA Univ. Paris VI, 81, 28 p.

**1989** **44.** Estimation et prévision non paramétrique d'un processus stationnaire.
CRAS, Paris, 308, I, 453-456.

**45.** Tests du $\chi^2$ généralisés. Comparaison avec le test du $\chi^2$ classique.
Revue Statist. Appliquée, 37, 1, 43-52.

**46.** Propriétés de l'opérateur de covariance empirique d'un processus vectoriel.
Publ. LSTA, 95, 22 p.

**47.** Nonparametric estimation of a non linear filter using a density estimator with a zero-one explosive behaviour in $\mathbb{R}^d$.
Statistics and Decisions, 7, 3, 229-241.

**48.** Propriétés des opérateurs de covariance empirique d'un processus stationnaire Hilbertien.
CRAS, Paris, 309, I, 873-875.

**1990** **49.** Estimation et prevision d'un processus autoregressif Hilbertien.
Publ.LSTA, Univ. Paris VI, 107, 22 p.

**50.** Estimation et prévision d'un processus autorégressif Hilbertien. Le cas général.
Publ. LSTA, Univ. Paris VI, 108, 20 p.

**51.** Modèle autorégressif Hilbertien. Application à la Prévision du comportement d'un processus à temps continu sur un intervalle de temps donné.
CRAS, Paris, 310, I, 787-790.

**52.** Sur les processus autorégressifs dans un espace de Hilbert.
Publ. ISUP, XXXV, 2, 3-17.

**1991** **53.** Inégalités de Bernstein pour un processus mélangeant à temps discret ou continu.
Publ. LSTA, 126, 16 p.

**54.** Nonparametric prediction for unbounded almost stationary processes.
Nonparametric functional estimation and related topics.
Proc. NATO Advanced Inst. Spetsai (1990) ed. G. ROUSSAS. KLUWER, 389-403.

**55.** Modelization, nonparametric estimation and prediction for continuous time processes. Nonparametric functional estimation and related topics.
Proc. NATO Advanced Inst. Spetsai (1990) ed. G. ROUSSAS. KLUWER, 509-529.

**56** Estimation d'un processus autorégressif à temps continu.
(en coll. avec Y. KUTOYANTS et T. MOURID).
CRAS, Paris, 312, I, 747-750.

**57.** Comparaison des méthodes de simulation d'un bruit blanc Gaussien.
(en coll. avec D. SMILI)
Rev. Statist. Appliquée, XXXIX, 3, 5-16.

**58.** Statistique non paramétrique des processus à longue mémoire. Le cas du modèle de régression.
Publ. ISUP, XXXVI, 1-2, 119-123.

**1992** **59.** Estimation paramétrique d'un processus de diffusion avec retards (en coll. avec Y. KUTOYANTS et T. MOURID).
Ann. de l'Inst. Henri Poincaré, Proba. et Statist., 28, 1, 95-106.

**60.** Prévision d'une fonction aléatoire.
Statistica, LI, 2, 153-164.

**61.** Analyse et prévision des séries temporelles (en coll. avec J.P. LECOUTRE).
MASSON ed., 207 p.

**62.** Théorèmes limites pour les processus autorégressifs Banachiques. Applications aux processus réels à temps continu.
Publ. LSTA, Univ. Paris VI, 159, 19 p.

**1993** **63.** Erreur quadratique asymptotique optimale pour les estimateurs à noyau de la densité et de la régression d'un processus mélangeant.
C.R. Acad. Sci. Paris t. 316, ser. I, 293-295.

**64.** Propriétés asymptotiques des processus autorégressifs Banachiques.
Applications aux processus réels à temps continu.
C.R. Acad. Sci. Paris t. ? ? ser. I.

**65.** Bernstein-type large deviations inequalities for partial sums of strong mixing processes.
STATISTICS 24 (1993), 59-70.

**66.** Erreur quadratique asymptotique optimale de l'estimateur non paramétrique de la régression pour des observations discrétisées. (En coll. avec N. CHEZE-PAYAUD).
C.R. Acad. Sci. Paris t. 317 ser. I, p. 891-894.

**67.** Vitesses optimales et superoptimales des estimateurs fonctionnels pour les processus à temps continu.
C.R. Acad. Sci. Paris t. 317, ser. I, 1075-1078.

**1994** **68.** Etude asymptotique de la densité associée à un filtre d'ordre infini.
Bull. Soc. Math. de Belgique. Nouvelle série n° 1 t. 1-11 (1994).

**69.** Optimal and superoptimal quadratic errors of functional estimators for continuous time processes.
(preprint LSTA) 27 p.

**70.** Estimation of the embedding dimension (en coll. avec D. GUEGAN).
Preprint ENSAE n° 9345.
Accepté par Internat. J. of Bifurcation and chaos. (1999)

**1995** **71.** Optimal asymptotic quadratic error of density estimators for strong mixing or chaotic data.
Statistics and Probability letters, 22, 1995, 339-347.

**72.** Nonparametric estimation of the chaotic function and the invariant measure of a dynamical system (en coll. avec D. GUEGAN).
Statistics and Probability letters, 25, 3, 201-212.

**73.** Nonparametric methods for chaotic data.
II Congresso Anual da Sociedade Portuguese de Estatistica (Luso 1994).
Imprimé en 1995.

**74.** Sur le comportement exotique de l'estimateur à noyau de la densité marginale d'un processus à temps continu.
C.R. Acad. Sci. Paris, t. 320 Série I, p. 369-372.

**75.** Asymptotic estimation of a non-linear infinite filter. Application to the estimation of Volterra series.
J. of nonparametric Statistics, 5, p. 61-73.

**1996** **76.** **Nonparametric Statistics for stochastic processes. Estimation and prediction.**
169 pages. Lecture Notes in Statistic. Springer-Verlag.

**77.** A course in Stochastic processes. Stochastic models and Statistical inference.
(en coll. avec H.T. NGUYEN). 351 pages. Kluwer Acad. Publishers.

**78.** Limit theorems for Banach-valued autoregressive processes. Applications to real continuous time processes.
"Bulletin of the Belgian Mathematical Society" 9, 537-555 (1996).

**79.** Recursive nonparmetric estimation of nonlinear systems of Volterra type
(en coll. avec O. LESSI).
"Statistica", anno LV, n° 3.

**80.** Modern Methods of Prediction. "Méthodes des processus hors d'équilibre".
Budapest.

**81.** Accurate rates of density estimators for continuous time processes
(en coll. avec D. BLANKE).
Statistics and Probability Letters, 33, 185-91.

**1997** **82.** Parametric rates of nonparametric estimators and predictors for continuous time processes.
Annals of Statistics. 1997, 25, 3, 982-1000.

**83.** A zero infinite law. Application to estimation of Volterra processes.
Revue Roumaine de Maths. XLII, 7-8, p. 513-524 (1997).

**84.** Independence and non-causality in complex systems.
CR Colloque sur les systèmes complexes TATA (1996).

**85.** Estimation de la densité en temps continu et temps locaux.
Preprint Univ. Paris 6 (janvier 1997).

**86.** Temps local et estimation sans biais de la densité en temps continu.
CRAS, 325 I p. 531-534.

**87.** Nonparametric estimation and prediction for continuous time processes.
Non-linear Analysis Vol. 30, 6, p. 3547-3551.
(proceed. $2^{nd}$ World Congress of non-linear analystes, Athènes, 1996.

**1998** **88.** Estimation of an autoregressive semiparametric model with exogenous variables (en coll. avec J. SHEN).
Journal of Statist. Planning and inference, 8, 1, p. 105-127 (1998).

**89.** Minimax rates of density estimators for continuous time processes.
Sankhy$\overline{a}$, Ser. A, 60, 1, (1998).

**90.** **Nonparametric Statistics for Stochastic processes.**
Deuxième édition révisée et augmentée de 1996 (210 pages au lieu de 169).
Lecture Notes in Statist. n° 110, Springer Verlag (1998).

**1999** **91.** Local time and density estimation in continuous time.
(Coll Y. DAVYDOV) Math. Methods of Statistics, 8, 1, 22-45 (1999).

**92.** On the equivalence of measures induced by Banach valued Gaussian autoregressive processes. (Coll. T. MOURID).
Stochastic Anal. and Appl., 17, 2, p. 137-144 (1999).

**93.** Autoregressive Hilbertian Processes.
Annales de l'ISUP, XXXIII, 2-3, 25-55 (1999).

**94.** Optimal asymptotic quadratic errors of nonparametric regression function estimates for a continuous time process from sampled data
(Coll. N. CHEZE-PAYAUD) Statistics, 32, p. 229-247 (1999).

**95.** Asymptotic normality for kernel estimators in discrete and continuous time
(Coll. F. MERLEVEDE et M. PELIGRAD)
Journal of Multivariate Analysis, 68, p. 78-95 (1999).

**96.** Covariance estimation for an $ARH(1)$.
Preprint Univ. Paris 6, 38 pages (1999).

**97.** Représentation autorégressive de l'opérateur de de covariance empirique d'un ARH(1). Applications.
CRAS, 320, I p. 531-534 (1999).

**2000** **98.** A family of minimax rates of density estimators for continuous time processes.
(Coll. D. BLANKE). Stochastic Analysis and Appl., 18, 6, 871-900.

**99.** **Linear processes in function spaces. Theory and Applications**
( 283 pages) chez Springer Verlag. Lectures Notes in Statistics n° 149.

**2001** **100.** Functional tests of fit - 15 p.
Proceedings du Workshop GOF 2000 (Univ. Paris 5), décembre 2001.

**2002** **101.** Estimation of the mean and the covariance operator of autoregressive processes in Banach spaces.
Statist. Inf. for Stoch. Proc., 5, 287-306 (2002).

**102.** Modelization and nonparametric estimation for a dynamical system with noise.
(Coll. D. BLANKE et D. GUEGAN)
21 p., accepté par Stat. Inf. for Stoch. Proc.

**103.** Estimation localement suroptimale et adaptative de la densité.
CRAS, I, 334, 591-595.

**104.** Estimation suroptimale de la densité par projection.
Publ. LSTA. Univ. Paris 6 n°5, 40 pages.

**105.** On efficiency criteria in density estimation.
Article invité. JIRSS, 1, 1-2, 127-142.

**2003** **106.** Estimation of autocorrelation operator and prediction for infinite dimensional autoregressive processes.
Math. Methods of Statistics (2002), Vol 11, 4, 381-401, 2003.

**107.** A simple inequality for perturbations of eigenvectors in Hilbert spaces.
Preprint, 5 p.

**108.** Prévision d'un processus autorégressif Banach.
(Coll. A. LABBAS et T. MOURID)
accepté par Maghreb Math., 12 p.

**109.** Berry-Esseen inequality for linear processes in Hilbert spaces.
Statistics and Probability letters, 63, 243-247.

**110.** Processus autorégressifs fonctionnels et applications.
Article invité dans Matapli, à paraître en 2004.

**111.** Processus linéaires vectoriels et prédiction.
C. R. Math. Acad. Sci. Paris 337, 2, 115-118.

**2004** **112.** Local superefficiency of data driven projection density estimators in continuous time (coll. D. BLANKE). Statistics and operation research transactions, 28(1), 37-54.

**113.** Erratum and complements to "Berry-Esseen inequality for linear processes in Hilbert space". Statist. Probab. Letters 70, 171-174.

**114.** Moyennes mobiles Hilbertiennes standard. Annales ISUP, 48, 3, 17-28.

**2005** **115.** Estimation suroptimale de la densité par projection.
Canad. Journal Statist., 33, 1, 1-18.

**116.** **Inférence et prédiction en grandes dimensions**. Economica. 194 p.

**117.** Moyennes mobiles Hilbertiennes (coll. C. Turbillon), 29 pages, soumis.

**2006** **118.** The empirical measure in continuous time.
Rend. Circ. Mat. Palermo, 2, 77, 57-68.

**119.** Asymptotic parametric prediction, en révision.

**120.** Données fonctionnelles, dans : Approches non paramétriques
en régression, 183-198, Journées d'études en Statistique, CIRM.

**2007** **121.** Optimal and efficient predictors.
Stat. and Proba. Letters, 77, 3, 280-287.

**122.** General linear processes in Hilbert spaces and prediction.
J. Statist. Planning Infer., 137, 3, 1, 2007, 879-894.

**123.** Inference and prediction in large dimension (coll. D. Blanke),
Wiley-Dunod, 316 pages.

**2008** **124.** Estimating the support of a probability distribution,
à paraître dans Rend. Circ. Mat. Palermo.

**125.** Estimation du paramètre des moyennes mobiles hilbertiennes
(coll. C. Turbillon, J.-M. Marion, B. Pumo),
Comptes Rendus Mathématique, 346, 5-6, 2008, 347-350 .

**126.** Regression estimation and prediction in continuous time (coll. D. Blanke),
J. Japan Statist. Soc. 38, 1, 2008, 15-26.

**127.** Evaluation using statistical analysis of different policies for the inspections
of the catenary contact wire, (coll. J. Casaert, F. Sourget, R. Ziani, M. Antoni)
(WCRR, Seoul 2008).

**2009** **128.** A note on asymptotic parametric prediction
J. Statist. Plann. Inference, 2009, 4, 1506-1513.

**129.** Produits tensoriels de processus ARMA fonctionnels
Comptes-Rendus Mathématiques, 347, 7-8, 2009, 419-423.

**130.** Estimation par projection de l'opérateur d'une Moyenne Mobile
Hilbertienne (coll. C. Turbillon), Annales de l'ISUP, 2009, 53, 1, 31-46.

**131.** Estimation fonctionnelle, à paraître aux éditions T.I.

**132.** Tensorial products of linear Hilbertian processes, soumis.

**133.** Utilisation d'un estimateur non paramétrique de la densité conditionnelle
pour l'étude de la dégradation spatiale du fil de contact caténaire,
en préparation (coll. J. Casaert et R. Ziani).