ENSAI 2ème année　　　　　　　　　　　　　　Année scolaire 2007-2008

SERIES TEMPORELLES
TD & TP

Vincent LEFIEUX

Table des matières

Remarques générales

1. Sauf mention contraire, on désignera par :
   – bruit blanc : bruit blanc faible
   – processus stationnaire : processus faiblement stationnaire
2. Les TP seront réalisés sous le logiciel SAS.
3. Les exercices suivis de (*) sont plus difficiles.

1 Stationnarité

Exercice 1
Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance σ^2.
Etudier la stationnarité des deux processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suivants :

1. $X_t = a + b\varepsilon_t + c\varepsilon_{t-1}$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$
2. $Y_t = \varepsilon_t \cos(\omega t) + \varepsilon_{t-1} \sin(\omega t)$ où $\omega \in [0, 2\pi[$

Exercice 2
Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance σ^2.
Soit le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suivant :

$$X_t = at + b + \varepsilon_t$$

1. A quelle condition le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est-il stationnaire ?
2. Etudier la stationnarité du processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ "différence première" :

$$Y_t = X_t - X_{t-1}$$

Exercice 3
Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance σ^2.
Soit le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suivant :

$$X_t = \sum_{i=0}^{N} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

où $N \in \mathbb{N}^*$ et $(\theta_0, \theta_1, ..., \theta_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$.

1. Indiquer pourquoi le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire.
2. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X_t)$.
3. Calculer la fonction d'autocovariance de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 4
Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance σ^2.
Soit le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ suivant :

$$X_t = \sum_{i=0}^{t} (-1)^i \varepsilon_i$$

1. Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est-il du second ordre ?
2. Calculer les termes d'autocovariance $\mathbb{C}ov(X_t, X_{t+h})$ pour $t \in \mathbb{N}$ et $t + h \in \mathbb{N}$ (on distinguera les cas $h \geq 0$ et $h < 0$).
3. Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est-il stationnaire ?

Exercice 5 (*)
Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance σ^2.
Soit le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suivant :

$$X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq 0$ et $|\theta| < 1$.

1. Calculer l'autocorrélogramme simple de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.
2. Soit la fonction $\Psi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ suivante :

$$\Psi(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0 \\ \rho & \text{si } h \in \{-1, 1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Lorsque $|\rho| \leq \frac{1}{2}$, préciser le processus stationnaire dont Ψ est l'autocorrélogramme simple.
   (b) Lorsque $|\rho| > \frac{1}{2}$, montrer que Ψ n'est pas définie positive.

2 Autocorrélogrammes et densité spectrale

Exercice 1 (*)
Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance σ^2.
Soit le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suivant :

$$X_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i \varepsilon_{t-i}$$

où θ est tel que $\theta \neq 0$ et $|\theta| < 1$.

1. Calculer la fonction d'autocovariance et l'autocorrélogramme simple de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$?
2. Calculer la densité spectrale de puissance $f(\omega)$ de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. La représenter graphiquement.
3. Soit le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suivant :
$$Y_t = \varphi Y_{t-1} + \eta_t$$
où $|\varphi| < 1$ et où $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2 tel que $\eta_t \perp \mathcal{H}_{-\infty}^{t-1}(Y)$.
$\mathcal{H}_{-\infty}^{t-1}(Y)$ est l'espace fermé engendré par les combinaisons linéaires des $(Y_i)_{i\leq t-1}$.
On admettra que le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ vérifie :
$$Y_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \varphi^i \eta_{t-i}$$
Calculer la fonction d'autocovariance de $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.
Comparer avec la première question.
4. Dans le cas général, soit une suite $(c_h)_{h\in\mathbb{Z}}$ définie par :
$$c_h = ab^{|h|}$$
où $a > 0$ et $|b| < 1$.
Montrer que $(c_h)_{h\in\mathbb{Z}}$ est une fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire à définir.

Exercice 2
Soit une fonction d'autocovariance réelle $(c_h)_{h\in\mathbb{Z}}$ possédant un nombre fini de valeurs non nulles.

1. Montrer que la densité spectrale associée est de la forme :
$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(c_0 + 2\sum_{h=1}^{n} c_h \cos(\omega h)\right)$$
2. Définir un processus stationnaire ayant pour densité spectrale :
$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}(5 - 4\cos\omega)$$

Exercice 3 (*)

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus ayant une représentation $MA(1)$ du type :

$$X_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1}$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fort de variance 1 tel que :

$$\forall i \in \mathbb{Z} : \mathbb{E}\left(\varepsilon_t^3\right) = c < +\infty$$

Soit $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus tel que :

$$X_t = Y_t - \frac{1}{2}Y_{t-1}$$

On admettra que $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ vérifie :

$$Y_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} X_{t-i}$$

1. (a) Vérifier que $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc dont on calculera la variance.
   (b) Montrer ensuite que :
   $$Y_t = X_t - \Pi_{\mathcal{H}_{-\infty}^{t-1}(X)}(X_t)$$
   où $\Pi_{\mathcal{H}_{-\infty}^{t-1}(X)}$ est la projection sur l'espace fermé $\mathcal{H}_{-\infty}^{t-1}(X)$.
   On pourra montrer que $\mathcal{H}_{-\infty}^{t-1}(X) = \mathcal{H}_{-\infty}^{t-1}(Y)$.
2. On admettra que $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ vérifie :
   $$Y_t = \varepsilon_t - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{3}{2^i}\varepsilon_{t-i}$$
   (a) Calculer $\mathbb{E}\left(Y_1^2 Y_2\right)$.
   (b) Y_1 et Y_2 sont-elles des v.a.r. indépendantes ?

Exercice 4

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite de v.a.r. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
Soit le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suivant :

$$X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

où $\theta \neq 0$ et $|\theta| < 1$.
Soit le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suivant :×

$$Y_t = \begin{cases} 1 & \text{si } X_t > 0 \\ 0 & \text{si } X_t \leq 0 \end{cases}$$

1. (a) Quelle est la loi des v.a.r. Y_t ?
   (b) Quelle est la loi conjointe du vecteur aléatoire (X_t, X_{t-1}) ?
2. Montrer que le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire et donner sa fonction d'autocovariance.
3. On peut déduire de ce qui précède que le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ admet une représentation du type :
   $$Y_t = \mu + u_t - \alpha u_{t-1}$$
   où μ est une constante à préciser et $(u_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2.
4. Proposer une méthode pour calculer α et σ^2.

Indication

On admettra que :

$$\mathbb{C}ov(Y_t, Y_{t-1}) = K = \frac{1}{\pi}\arctan\left[\left(\frac{1+\theta^2-\theta}{1+\theta^2+\theta}\right)^{1/2}\right] - \frac{1}{4}$$

3 Décomposition saisonnière à l'aide des moyennes mobiles

Exercice 1
Soient les moyennes mobiles M_1 et M_2 suivantes :

$$M_1 = \frac{1}{2}B\left(I+F\right)$$
$$M_2 = \frac{1}{4}B\left(I+F+F^2+F^3\right)$$

1.
   (a) Quelles sont les séries temporelles absorbées par M_1 ?
   (b) Quelles sont les séries temporelles invariantes par M_1 ?
2.
   (a) Quelles sont les séries temporelles absorbées par M_2 ?
   (b) Quelles sont les séries temporelles invariantes par M_2 ?
3. Montrer que M_1M_2 laisse invariantes les tendances linéaires.
4. Quelles sont les séries temporelles absorbées par M_2M_2 ?

Exercice 2
Soient les moyennes mobiles suivantes :

$$M_3 = \frac{1}{3}B^2\left(I+F+F^2\right)$$
$$M_4 = 2M_3 - \left(M_3M_3\right)$$

1. Montrer que M_4 laisse invariantes les tendances linéaires.
2. Quelles sont les séries temporelles absorbées par M_4 ?
3. Calculer le pouvoir de réduction de variance de M_4.

Exercice 3 (*)
Soit $(X_t)_{t\in\{1,...,N\}}$ une série chronologique dont la tendance est localement polynomiale de degré $p=3$. Ainsi, à t fixé, X_t vérifie :

$$\forall h \in \{-m,...,m\} : X_{t+h} = a_0 + a_1h + a_2h^2 + a_3h^3 + \varepsilon_{t+h}$$

où ε_t est une perturbation aléatoire d'espérance nulle.
On veut estimer les paramètres a_i pour $i \in \{0,1,2,3\}$ du modèle par les moindres carrés ordinaires sur les $2m+1$ points $X_{t-m},...,X_t,...X_{t+m}$. On note $\widehat{a}_i$ cet estimateur de a_i.

1. Déterminer le système d'équations définissant les $\widehat{a}_i$.
2. Expliciter l'estimateur $\widehat{a}_0$ comme une combinaison linéaire des valeurs $X_{t-m},...,X_t,...,X_{t+m}$. Cela définit une moyenne mobile M^3_{2m+1} centrée symétrique d'ordre $2m+1$ appelée moyenne mobile cubique sur $2m+1$ points.
3. Montrer que M^3_{2m+1} laisse invariantes les tendances polynomiales de degré inférieur ou égal à trois.
4. On considère maintenant la moyenne mobile cubique sur 7 points : M^3_7.
   (a) Expliciter les coefficients de M^3_7.
   (b) Vérifier que M^3_7 peut s'écrire :

$$M^3_7 = I - \frac{1}{21}\left(I-B\right)^4\left(2F^3+5F^2+2F\right)$$

   (c) Calculer le pouvoir de réduction de variance de M^3_7.

Exercice 4

1. Créer les séries suivantes dans une table SAS (pour $t \in \{1, ..., 200\}$) :
   - T_t, une tendance linéaire :
   $$T_t = 100 + 3t$$
   - S_t^1, une série périodique de période 3 :
   $$S_t^1 = 50 \cos\left(\frac{2\pi}{3} t\right)$$
   - S_t^2, une série périodique de période 4 :
   $$S_t^2 = 50 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} t\right)$$
   - S_t, une série périodique de période 12 :
   $$S_t = S_t^1 + S_t^2$$
   - ε_t, une perturbation i.i.d. suivant une loi normale :
   $$\varepsilon_t \leadsto N\left(0, 15^2\right)$$
   - X_t :
   $$X_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$$
2. A l'aide de la procédure EXPAND, appliquer les moyennes mobiles suivantes centrées d'ordre 3, 4 et 12 sur les six séries précédentes.
   - $M_3 = \frac{1}{3} F\left(I + B + B^2\right)$
   - $M_4 = \frac{1}{4} F^2\left(\frac{1}{2} I + B + B^2 + B^3 + \frac{1}{2} B^4\right)$
   - $M_{12} = \frac{1}{12} F^6\left(\frac{1}{2} I + B + B^2 + B^3 + B^4 + B^5 + B^6 + B^7 + B^8 + B^9 + B^{10} + B^{11} + \frac{1}{2} B^{12}\right)$

   Quelles conclusions pouvez vous tirer ?

4 Prévision linéaire optimale

Exercice 1 (*)

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance σ^2.
Soit le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suivant :

$$X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

1. On suppose que $|\theta| < 1$.
   (a) Vérifier que la prévision linéaire optimale de X_{t+1} à partir du passé $(X_i)_{i\leq t}$ est :
   $$\widehat{X}_{t+1} = -\sum_{i=1}^{+\infty}\theta^i X_{t+1-i}$$
   (b) Quelle est la variance de l'erreur de prévision de X_{t+1} à partir du passé $(X_i)_{i\leq t}$?
2. On suppose que $\theta = 1$.
   Donner l'expression de la prévision linéaire optimale de X_{t+1} à partir de $(X_i)_{1\leq i\leq t}$, ainsi que la variance de son erreur de prévision.

Exercice 2

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{N}}$ un bruit blanc de variance σ^2 avec $\varepsilon_0 = 0$.
Soit le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ suivant :

$$\forall t \in \mathbb{N}^* : X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

où $|\theta| < 1$.
On admettra que $\varepsilon_t \perp \mathcal{H}_0^{t-1}(X)$ pour $t \in \mathbb{N}$.

1. Pour $h = 1$, construire $\widehat{X}_1(1)$ le prédicteur de X_2 sachant X_1, puis $\widehat{X}_2(1)$ le prédicteur de X_3 sachant X_1 et X_2. Trouver ensuite une relation de récurrence simple exprimant $\widehat{X}_t(1)$ en fonction de $\widehat{X}_{t-1}(1)$ et de X_t.
2. Pour $h > 1$, montrer que $\widehat{X}_t(h)$ est constant (ne dépend pas de h).
3. Montrer que la solution $\widehat{X}_t(h)$ est égale à un lissage exponentiel simple du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ (on indiquera le coefficient de lissage).
4. Calculer l'erreur de prévision de X_{t+h} et trouver sa variance. Que se passe-t-il lorsque $h \to +\infty$?

Exercice 3

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite de v.a.r. indépendantes de loi $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$ avec $\sigma \neq 0$.

1. Soit le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} X_1 = \varepsilon_1 \\ \forall t \geq 2 : X_t = \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t \end{array}\right.$$

   où $\varphi \neq 0$ et $|\varphi| < 1$.

   (a) Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{L}^2$ vers une limite X qu'on explicitera.

   (b) Calculer $\mathbb{E}(X_t)$ et $\mathbb{V}(X_t)$.

   (c) Quelle est la loi de X_t ? de X ?

   (d) Calculer les termes d'autocovariance $\mathbb{C}ov\left(X_t, X_{t+h}\right)$ pour $t \in \mathbb{N}^*$ et $t+h \in \mathbb{N}^*$. Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ est-il stationnaire ?

   (e) Donner l'expression de la prévision linéaire optimale de X_{t+1} pour $t \in \mathbb{N}^*$ à partir du passé $(X_i)_{1\leq i\leq t}$.

2. Soit le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suivant :

$$X_t = \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

   où $\varphi \neq 0$ et $|\varphi| < 1$.

   (a) Calculer $\mathbb{E}(X_t)$ et $\mathbb{V}(X_t)$.

   (b) Calculer la fonction d'autocovariance et l'autocorrélogramme simple de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

   (c) Calculer l'autocorrélogramme partiel de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

   (d) Estimer φ et σ^2 par la méthode du maximum de vraisemblance.

   (e) Donner l'expression de la prévision linéaire optimale de X_{t+1} à partir du passé $(X_i)_{i\leq t}$.

5 Processus SARIMA

Exercice 1
Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance σ^2.
Soit le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suivant :

$$X_t = \frac{1}{2}X_{t-1} - \frac{1}{4}X_{t-2} + \varepsilon_t$$

1. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus $AR(2)$ canonique.
2. Montrer que les termes d'autocovariance $\gamma(h)$, pour $h > 0$, vérifient l'équation de récurrence suivante :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2}\gamma(h-1) - \frac{1}{4}\gamma(h-2)$$

3. Exprimer $\gamma(1)$ et $\gamma(2)$ en fonction de $\gamma(0)$.
4. Résoudre l'équation de récurrence linéaire et exprimer la solution en fonction de $\gamma(0)$.
5. Calculer $\gamma(0)$ en fonction de σ^2.

Exercice 2
Soit le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ du second ordre suivant :

$$X_t = 4X_{t-1} - 4X_{t-2} + \varepsilon_t$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance 1.

1. Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est-il stationnaire ? canonique ?
2. Déterminer la représentation canonique du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ en notant $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le bruit blanc associé. Calculer $\mathbb{V}(\eta_t)$.
3. Quelle est l'écriture moyenne mobile infinie du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ (en fonction du processus $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$) ? En déduire $\mathbb{E}(X_t)$ et $\mathbb{V}(X_t)$.
4. Calculer l'autocorrélogramme simple du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.
   Calculer explicitement $\rho(h)$ pour $h \in \{0,1,2,3,4\}$.
5. Calculer l'autocorrélogramme partiel du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.
6. Soit le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suivant :

$$Y_t = \frac{3}{4}Y_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-1} + \xi_t$$

   où $(\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance 1, non corrélé à $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.
   Soit le processus $(\omega_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, supposé régulier, suivant :

$$\omega_t = \left(1 - \frac{3}{4}B\right)\left(1 - \frac{1}{2}B\right)^2 Y_t$$

   (a) Calculer $\mathbb{E}(\omega_t)$ et $\mathbb{V}(\omega_t)$.
   (b) Calculer l'autocorrélogramme simple ρ_ω du processus $(\omega_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.
   (c) En déduire que le processus $(\omega_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est solution de l'équation :

$$\omega_t = \nu_t + \theta_1\nu_{t-1} + \theta_2\nu_{t-2}$$

   où $(\nu_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc.

(d) En déduire que $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus ARMA dont on précisera les ordres respectifs de la partie autorégressive et de la partie moyenne mobile.

Indication

Pour $0 < \rho < 1$, on a :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} i\rho^i = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$
$$\sum_{i=0}^{+\infty} i^2\rho^i = \frac{\rho(\rho+1)}{(1-\rho)^3}$$

Exercice 3

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus du second ordre, centré, stationnaire, de variance σ^2.
Soient les processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suivants :

$$Y_t = X_t - 0,4X_{t-1}$$
$$Z_t = X_t - 2,5X_{t-1}$$

1. Les processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont-ils du second ordre ?
2. Les processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont-ils stationnaires ?
3. Exprimer les fonctions d'autocovariance respectives γ_Y et γ_Z des processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ en fonction de la fonction d'autocovariance γ_X du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.
4. Déterminer les autocorrélogrammes simples respectifs ρ_Y et ρ_Z des processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, et les comparer.
5. Exprimer la densité spectrale du processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ en fonction de la densité spectrale du processus $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. En déduire une relation entre les variances de $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.
6. Pour $t \in \mathbb{Z}$, exprimer la v.a.r. X_t, sous forme autorégressive, en fonction :
   (a) de $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$
   (b) de $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$
7. On suppose en outre dans toute cette question que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2.
   Soit le processus $(U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suivant :
   $$U_t = 2X_{t-2} - 2X_{t-1}$$
   (a) Soit le processus $(W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suivant :
   $$W_t = U_t + Z_t$$
   Montrer que $(W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ admet une représentation MA canonique que l'on précisera (on notera $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le bruit blanc associé).
   (b) Exprimer la variance de η_t en fonction de σ^2.
   (c) Calculer l'autocorrélogramme simple ρ_W du processus $(W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

6 Pratique des modèles SARIMA

Exercice 1
Modéliser à l'aide de la méthode de Box et Jenkins les séries *simul1*, *simul2*, *simul3* et *simul4*.
Ces séries sont contenues dans les fichiers *'simul1.txt'*, *'simul2.txt'*, *'simul3.txt'* et *'simul4.txt'*.

Exercice 2
Modéliser à l'aide de la méthode de Box et Jenkins la série *elec_ austr* (contenue dans le fichier *'elec_ austr.txt'*) qui correspond à la production mensuelle australienne d'électricité (en millions de kWh) de janvier 1956 à février 1991.