

Modélisation stochastique - Processus de Poisson homogènes - Indications

Exercice 1.

On a un processus de Poisson homogène d'intensité 3.

1. $\mathbb{P}(N(2) = 1)$, c'est à dire la proba qu'une Poisson de paramètre 6 soit égale à 1.
2. $\mathbb{P}(N(5) = 0)$, c'est à dire la proba qu'une Poisson de paramètre 15 soit égale à 1.
3. Soit $[t_1, t_1 + 2]$ et $[t_2, t_2 + 2]$ deux périodes disjointes. La proba demandée vaut

$$\mathbb{P}(N(t_1 + 2) - N(t_1) \geq 2, N(t_2 + 2) - N(t_2) \geq 2),$$

et on utilise l'indépendance des accroissements d'un processus de Poisson.

Exercice 2.

Le nombre de particules enregistrées peut être vu comme un processus de Poisson composé, c'est à dire

$$N_1(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

où $N(t)$ est le processus de Poisson d'intensité 4 (processus des arrivées de particules), et X_i une v.a. qui vaut 1 si enregistrement, 0 sinon (donc une Bernoulli, de paramètre 1/2 d'après l'énoncé). Un processus de Poisson composé avec des X_i qui sont des Bernoullis est un processus de Poisson (se montre facilement, indépendance et stationnarité des accroissements, + loi de Poisson). Pour calculer son intensité, il suffit de regarder $E[N_1(t)] = 2t$, donc intensité 2. Du coup, S suit une loi expo de paramètre 2, et tout se déduit facilement.

Exercice 3.

On a, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(X(t) = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_1(t) = k + n) \mathbb{P}(N_2(t) = n),$$

et on utilise le fait qu'on a des lois de Poisson. Il y a plusieurs façons de faire pour la proba, la plus simple est d'utiliser le fait que $N_1(t)/t$ converge p.s. vers λ_1 , du coup, $X(t)/t$ converge vers $\lambda_1 - \lambda_2$ p.s. Du coup, $X(t)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ suivant le signe de $\lambda_1 - \lambda_2$.

Exercice 4.

2. D_t est compris entre 0 et t . Soit Σ_n la date du n -ème saut du processus de Poisson. On sait que, sachant $N(t) = n$, les instants de sauts sont répartis uniformément entre 0 et t . Donc, sachant $N(t) = n$, Σ_n suit la même loi que la n -ème statistique d'ordre d'un n -échantillon de lois uniformes sur $[0, t]$. Donc $\mathbb{P}(\Sigma_n \leq u | N(t) = n) = [u/t]^n$ pour $u \leq t$, 0 pour $u < 0$, et 1 pour $u > t$. Par ailleurs, $D_t = t - \Sigma_{N(t)}$. On en déduit, si $u < t$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_t > u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(D_t > u | N(t) = n) \mathbb{P}(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(t - u > \Sigma_n) \mathbb{P}(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[t - u]^n [\lambda t]^n \exp(-\lambda t)}{t^n n!} = \exp(-\lambda t + \lambda[t - u]) = \exp(-\lambda u), \end{aligned}$$

et on en déduit la convergence vers une $\mathcal{E}(\lambda)$.

3. Si T est une variable de loi exponentielle, $\mathbb{P}(T \geq s + u | T \geq s) = \mathbb{P}(T \geq u)$. Donc, comme $T_{N(t)+1} = D_t + S_t$, on en déduit $\mathbb{P}(S_t \geq u) = \mathbb{P}(T_{N(t)+1} \geq u + D_t)$. Or, $\mathbb{P}(T_{N(t)+1} \geq u + s | D_t = s) = \mathbb{P}(T_{N(t)+1} \geq u + s | T_{N(t)+1} \geq s) = \exp(-\lambda u)$, d'où

$$\mathbb{P}(T_{N(t)+1} \geq u + D_t) = \int \mathbb{P}(T_{N(t)+1} \geq u + s | D_t = s) d\mathbb{P}(D_t = s) = \exp(-\lambda u).$$

On en déduit que S_t suit une exponentielle de paramètre λ .

4. $D_t + S_t = T_{N(t)+1}$ suit une exponentielle de paramètre λ .