Modélisation stochastique - Chaînes de Markov homogènes, indications

Exercice 2.

1.

- Hypothèse markovienne :

  Contre : Si un assuré a eu beaucoup d'accidents par le passé, il va sûrement en tenir compte et modifier son comportement. Le modèle markovien ne capte pas cet aspect, puisqu'il ne se préoccupe que de la date $n-1$ pour modéliser la loi conditionnelle de X_n.

  Pour : Simple. Par ailleurs, le reproche ci-dessus n'est pas forcément valable dans les cas où l'assuré ne peut pas modifier son comportement. (s'il s'agit d'une assurance collision, l'assuré peut modifier son comportement, s'il s'agit d'une assurance contre le vol, c'est déjà moins clair)

- Hypothèse d'homogénéité :

  Contre : Evolution dans le temps de la probabilité de sinistre.

  Simple : Simple, et acceptable sur du court terme.

Attention aux états : X_n n'est pas directement la chaîne de Markov sous-jacente. On définit Y_n de la façon suivante : $Y_n = 1$ si pas d'accident au cours des deux années précédentes, $Y_n = 2$ si un accident l'année $n-2$ et 0 l'année $n-1$, $Y_n = 3$ si un accident l'année $n-1$ et 0 l'année $n-2$, $Y_n = 4$ si deux accidents. Cette numérotation est arbitraire. On a $p_{12} = 0$, $p_{13} = 0.04$, $p_{11} = 0.96$, $p_{14} = 0$, et $p_{22} = 0$, $p_{21} = 0.96$, $p_{23} = 0.04$, $p_{24} = 0$, et $p_{31} = 0$, $p_{32} = 0.88$, $p_{33} = 0$, $p_{34} = 0.12$, et enfin $p_{41} = 0$, $p_{42} = 0.88$, $p_{43} = 0$, $p_{44} = 0.12$. La chaîne est bien entendue irréductible puisque tous les états communiquent entre eux. Elle est récurrente car à espace d'états finis (elle est même récurrente positive). Ce n'est pas demandé, mais elle est apériodique, se voit grâce aux boucles sur l'état 1 et sur l'état 4.

2. Il faut calculer

$$\mathbb{P}(Y_5 = 1, Y_4 = 1, Y_3 = 1, Y_2 = 1, Y_1 = 1 | Y_0 = 1),$$

où 1 est l'état initial correspondant à pas de sinistres dans les deux dernières années. Grâce aux probas de transitions, c'est 0.96^5.

3. Il s'agit d'une chaîne de Markov irréductible à espace d'états finis, et apériodique. Donc $X_n \to \pi$ en loi, où π est l'unique mesure invariante, qu'on détermine facilement en résolvant $\pi^T P = \pi^T$. $E[X_n]$ tend vers l'espérance de la loi π. Numériquement, on trouve que $v = (0.9983, 0.0416, 0.0416, 0.0057)$ est un vecteur propre de P^T associé à la valeur propre 1. Il faut ensuite diviser par la somme des coefficients de v pour en déduire π.

4. Même approche qu'en cours, sauf qu'on observe N trajectoires au lieu d'une seule. La présence de N trajectoires rajoute la présence d'un produit supplémentaire dans la vraisemblance :

$$\prod_{k=1}^{N} \prod_{i=1}^{10} p_{x_{i,k}, x_{i+1,k}},$$

où $(X_{i,k})_{1 \le i \le 10}$ est la k-ème trajectoire de chaîne de Markov. On reprend la méthode du cours, et on trouve que $\hat{p}_{i,j}$ est égal au nombre de transitions observées de i vers j (toutes trajectoires confondues), sur le nombre de séjour dans l'état i (toutes trajectoires confondues).

Exercice 3.

1. Si X_n est la fortune du joueur à la date n. Les états sont les entiers compris entre 0 et la fortune totale mise en jeu (banque + joueur), on passe de l'état k à $k+1$ avec la probabilité p (victoire), et $1-p$ pour l'état $k-1$., ceci étant vrai sauf pour les deux états terminaux qui sont absorbants. La chaîne a trois classes (deux absorbantes donc récurrentes, une transiente, tous les états intermédiaires). On sait

donc que presque sûrement on va quitter les états transients, et que la partie se termine par une ruine ou une victoire sur la banque. Les questions de temps d'atteinte peuvent être traitées à partir des relations données en cours à partir du temps d'atteinte d'un état à partir d'un autre et les probas de transition.

2. Critique du modèle :

- Hypothèse markovienne :

  Contre : Il n'est pas très raisonnable de ne faire dépendre le taux de change que de X_{n-1} : ce taux peut notamment dépendre de la confiance des investisseurs dans la monnaie d'un pays, et cette confiance dépend de toute l'histoire (ou en tout cas d'une grande partie) du taux de change.

  Pour : Simple.

- Hypothèse d'homogénéité :

  Contre : La situation économique évolue au cours du temps, modifiant les probabilités de transition.

  Simple : Simple, et acceptable sur du (très) court terme.

3. La chaîne est simple, quand on est dans l'état k, on passe soit en $k-1$, $k+1$, soit on reste en k avec la proba $1/3$. Les seuls problèmes sont au bord. Quand on est en m, on va en $m+1$ avec proba $1/3$, et on reste en m avec proba $2/3$. Idem pour M où on va en $M-1$ avec proba $1/3$. La chaîne est facilement irréductible, récurrente positive car à espace d'états finis. Elle est même apériodique (se montre du fait qu'on peut rester sur chaque état avec proba non nulle).

4. Chaîne de Markov irréductible à espace d'états finis, apériodique, donc unique probabilité invariante, et quelle que soit la loi initiale de X_0, on a convergence en loi vers la loi invariante π, qu'on peut calculer de même que dans l'exercice précédent. Le calcul explicite n'est pas possible sauf à préciser m et M.

<u>Exercice 4</u>.

1. Critique du modèle :

- Hypothèse markovienne :

  Contre : Le comportement du client à la date n dépend en général de son histoire et de ses mauvaises expériences avec les différents opérateurs. Ne devrait pas dépendre que de l'opérateur chez qui il se trouve à la droite $n-1$.

  Pour : Simple.

- Hypothèse d'homogénéité :

  Contre : Les conditions du marché des télécoms évoluent en permanence (nouveaux types de contrats plus ou moins attractifs, avancées technologiques).

  Simple : Simple, et acceptable sur du court terme.

2. Même chose que dans l'exo 2.

3. On a une chaîne de Markov à espace d'états finis, irréductible et apériodique, donc unique mesure de proba invariante et convergence en loi de X_n vers cette mesure quel que soit l'état initial. On détermine cette mesure de même que précédemment. $\hat{\pi}(1)$ donne la répartition sur l'opérateur 1 à long terme, de même $\hat{\pi}(2)$ et $\hat{\pi}(3)$.

4. Pour estimer la variance asymptotique, on remplace p_{ij} par $\hat{p}_{ij}$ et π par $\hat{pi}$. On déduit du fait que $\hat{P} \to P$ en probabilité (et même presque sûrement) que le vecteur $\hat{pi}$ tend en probabilité vers π. Donc on possède un estimateur convergeant de la variance asymptotique.

5. C'est le théorème ergodique qu'il faut utiliser, ce profit moyen tend vers l'espérance de profit pour une année sous la loi stationnaire.