

## Modélisation stochastique - Chaînes de Markov homogènes

**Exercice 1.** Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov homogène à valeurs dans l'espace d'états  $\{1, 2, 3, 4\}$ , de matrice de transition

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les états transients, récurrents et leur période. La chaîne est-elle irréductible ? Existe-t-il des mesures stationnaires, si oui lesquelles ? Mêmes questions pour les chaînes à valeurs dans  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  de matrice de transition

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 1-p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et pour la chaîne à espace d'états  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  de matrice de transition

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 2.

Une compagnie d'assurance détermine ses primes à partir des sinistres enregistrés de ses clients. Si aucun accident ne s'est produit au cours des deux dernières années, la prime est de 400 euros. Si un accident s'est produit pendant les deux dernières années la prime monte à 750 euros, et si l'assuré a eu deux accidents pendant les 2 dernières années, la prime culmine à 1200 euros. On suppose qu'un assuré a au maximum un accident par an. On introduit  $X_n$  la prime payée par un client la  $n$ -ème année. Les analyses basées sur les statistiques de sinistres des années précédentes indiquent que :

- (a) Si un accident s'est produit l'année passée, il y a 12 % de chances d'avoir un accident cette année.
- (b) Si aucun accident n'a été enregistré l'an dernier, il y a seulement 4% de chances d'avoir un accident cette année.

1. Modéliser le problème en introduisant une chaîne de Markov homogène dont on précisera les états et la matrice de transition, et classifier les états. L'hypothèse markovienne et celle d'homogénéité sont-elles raisonnables, et dans quelle(s) situation(s) ?

2. Quelle est la probabilité qu'un assuré n'ait aucun sinistre en 5 ans ? (sachant qu'il n'en avait pas eu dans les années précédant la souscription du contrat)

3. Quand  $n$  est grand, par quoi peut-on approcher le montant moyen de la prime payé par un assuré quelconque au cours de la  $n$ -ème année ?

4. En fait, les vrais probabilités de transition sont inconnues, car les chiffres de 4% et 12% ont été estimés à partir d'observations faites sur 10 ans, où l'on a observé  $N$  trajectoires indépendantes de la chaîne de Markov. A partir de ces  $N$  trajectoires, déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance (sous contrainte) pour les probabilités de transition, et donner sa variance asymptotique.

### Exercice 3.

1. Reprendre le problème de la ruine du joueur et répondre aux questions du chapitre précédent à l'aide de la théorie des chaînes de Markov

2. On considère l'évolution d'un taux de change  $X_n$  = valeur du taux à la date  $n$ . Le taux de change ne varie jamais au-dessous d'un seuil minimal  $m$ , ni au-dessus d'un seuil maximal  $M > m$ . On modélise

$$X_n = (X_{n-1} + \xi_n) \mathbf{1}_{X_{n-1} + \xi_n > m, X_{n-1} + \xi_n < M} + m \mathbf{1}_{X_{n-1} + \xi_n \leq m} + M \mathbf{1}_{X_{n-1} + \xi_n \geq M},$$

où  $\xi_n$  est indépendant de  $\mathcal{F}_{n-1}$ , filtration naturelle de  $(X_n)_{n \geq 0}$ , et où les  $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont i.i.d. Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov homogène, et critiquer le modèle.

3. On suppose que  $\mathbb{P}(\xi_i = -1) = 1/3$ ,  $\mathbb{P}(\xi_i = 0) = 1/3$  et  $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = 1/3$ . Ecrire la matrice de transition, classifier les états.

4. Quelle prévision sur le taux de change peut-on faire à long terme ?

### Exercice 4.

On considère un marché des télécoms à 3 opérateurs. A l'année  $n = 0$ , les clients sont répartis de la façon suivante entre les opérateurs  $A$ ,  $B$  et  $C$  :

- Opérateur 1 : 12%
- Opérateur 2 : 40%
- Opérateur 3 : 48%

Chaque année, un client peut changer d'opérateur. On modélise son attitude par une chaîne de Markov homogène.

1. Critiquer la modélisation du problème par une chaîne de Markov homogène.
2. Pour estimer la matrice de transition, on a observé les comportements de  $N$  individus pendant une durée de  $n_0$  années. Ecrire la vraisemblance des observations, et déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de la matrice  $P$ .
3. On dispose à présent de

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Quel est, sur le long terme, la répartition des clients entre les différents opérateurs en considérant une chaîne de Markov homogène de matrice de transition  $\hat{P}$  ?

4. On admet que  $\sqrt{Nn_0}(\hat{p}_{ij} - p_{ij}) \rightarrow \mathcal{N}(0, p_{ij}(1-p_{ij})/\pi(i))$ , où  $\pi$  désigne l'unique mesure stationnaire de la chaîne. Proposer un estimateur de la variance asymptotique. Avec  $n_0 = 5$ , comment faut-il choisir  $N$  pour que cette variance asymptotique soit inférieure à 0.001 pour chaque coefficient de la matrice ?
5. Un contrat souscrit auprès d'un opérateur rapporte en moyenne 500 euros par an. Le marché étant composé de 10 millions de personnes, calculer le profit moyen de chaque opérateur au bout de deux ans.