Modélisation stochastique - Processus de Poisson homogènes

Exercice 1.

Des clients arrivent dans un magasin au rythme de 3 à la minute en moyenne. On modélise les temps d'arrivée par un processus de Poisson.

- Calculer la probabilité qu'il n'arrive qu'un seul client en 2 minutes.
- Calculer la probabilité qu'il n'arrive aucun client en 5 minutes.
- Calculer la probabilité pour que, dans deux périodes de 2 minutes disjointes, il arrive au moins deux clients.
- La modélisation par un processus de Poisson vous paraît-elle adaptée pour évaluer convenablement les probabilités ci-dessus ?

Exercice 2.

Un compteur de particules n'enregistre qu'une particule sur deux arrivant au compteur. On modélise l'arrivée des particules par un processus de Poisson au rythme moyen de 4 par minute. Soit S le temps d'attente entre deux particules enregistrées. Calculer la loi de S, son espérance et sa variance, et $\mathbb{P}(S > 1)$.

Exercice 3.

Soit $X(t) = N_1(t) - N_2(t)$ où N_1 et N_2 sont des processus de Poisson indépendants d'intensité respective λ_1 et λ_2. Déterminer la loi de $X(t)$. Calculer $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(|X_t| \leq c)$.

On utilise le processus $X(t)$ pour modéliser un flux de clients à une station de taxis. (N_1 nombre d'arrivées des clients, N_2 nombre d'arrivées des taxis) En quoi cette modélisation est-elle réaliste ou non?

Exercice 4.

On considère la situation suivante : un système a une durée de vie T_i. Après défaillance, il est remplacé par un système identique. On considère $N(t)$ le nombre de défaillances observées entre 0 et t. Les durées de vie sont modélisées par des variables exponentielles indépendantes de même paramètre λ. $N(t)$ est alors un processus de Poisson.

1. Ce modèle est-il adapté aux situations suivantes :
   - T_i = durée de vie d'un transistor.
   - T_i = durée de vie d'une voiture.
   - T_i = temps passé par un sélectionneur à la tête de l'équipe de France.
2. Soit D_t la durée écoulée depuis le dernier instant de défaillance avant t. Dans quel ensemble D_t prend-elle ses valeurs ? Montrer que cette variable admet une loi limite quand $t \to \infty$.
3. Soit S_t la variable aléatoire positive telle que $t + S_t$ soit l'instant de défaillance du système en fonctionnement à l'instant t. Quelle est la loi de S_t ? Du couple (D_t, S_t) ? Limite de la loi du couple quand $t \to \infty$?
4. Quelle est la loi de $D_t + S_t$? Limite de cette loi quand $t \to \infty$?