Modélisation stochastique
1ère année Isup

Olivier Lopez

March 31, 2009

Chapter 1

Rappels sur l'espérance conditionnelle

Dans de nombreux problèmes en probabilités et statistiques, on cherche s'intéresse au lien entre deux variables aléatoires. Par exemple, si Y est la durée de vie d'un individu, et X un vecteur de caractéristique (âge, poids, taille par exemple), il peut être intéressant d'identifier l'influence de ce vecteur aléatoire X sur la variable d'intérêt Y (par exemple pour connaître l'impact d'un surpoids sur la durée de vie etc.) Citons également d'autres exemples qui seront développés au long de ce cours :

- Soit X_j le montant de ma fortune en bourse au j-ème jour. Je souhaite connaître l'influence de $X = (X_1, ..., X_{n-1})$ (que j'observe) sur $Y = X_n$, ma fortune à la date n (par exemple pour prévoir si je risque d'être ruiné ou pas, dans ce cas je n'observe pas Y).

- Soit X_j le nombre de bactéries dans un certain milieu. Je souhaite connaître l'influence de $X = (X_1, ..., X_{n-1})$ sur $Y = X_n$ (pour prévoir l'extinction de la population, ou un effectif limite).

Dans ce type de problème, il devient donc crucial de mieux cerner la loi conditionnelle des observations, on notera $\mathcal{L}(Y|X)$ la loi de Y sachant X. Une première caractéristique importante est la notion d'espérance conditionnelle, c'est-à-dire l'espérance de cette loi conditionnelle. Bien entendu, de même que l'espérance ne permet pas de connaître toute la loi d'une variable aléatoire, l'espérance conditionnelle ne fournit pas toute l'information désirée sur la loi conditionnelle, mais elle fournit déjà certaines indications importantes.

Plus généralement, on considérera dans ce chapitre la notion d'espérance conditionnelle par rapport à une sous-tribu $\mathcal{B}$. Il faut comprendre $\mathcal{B}$ comme une tribu contenant l'information à partir de laquelle on souhaite expliquer Y. Ainsi, les deux exemples précédents peuvent être vus comme des cas où l'on s'intéresse à la loi de Y conditionnellement à la tribu $\mathcal{B} = \sigma(X_1, ..., X_{n-1})$, où $\sigma((U_k)_{k\in\mathcal{K}})$ désigne la plus petite tribu engendrée par les variables U_k. Mais dans certains cas, on peut être confronté à des tribus plus complexes (notamment quand l'information dont on dispose est plus fine que le simple historique de la fortune en bourse, par exemple si l'on connaît également un certain nombre d'indicateurs économiques qui influent sur le cours de mes actions).

Le but de ce chapitre est de rappeler un certain nombre de définitions concernant l'espérance conditionnelle, en partant de la vision dans L^2, puis en l'étendant à L^1 (section 1.1), même si dans le cadre de ce cours, on se concentrera essentiellement sur le cas L^2, et très peu sur le cas où les variables sont dans $L^1 - L^2$. La section 1.2 rappelle quelques méthodes pratiques de calculs de l'espérance conditionnelle.

1.1 Définition de l'espérance conditionnelle

Dans tout ce chapitre, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, où Ω est un ensemble (quelconque), $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω, et $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

1.1.1 Espérance conditionnelle par rapport à une tribu

Rappel : $L^2(\mathcal{F})$ désigne l'espace des variables aléatoires Z qui sont $\mathcal{F}-$mesurables à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ où $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ désigne la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$, et telles que $E[Z^2] < \infty$. Cette espace possède une structure d'espace de Hilbert si on le munit du produit hilbertien suivant :

$$< X, Y > \;=\; \int X(\omega)Y(\omega)d\mathbb{P}(\omega) = E[XY].$$

La norme associée à ce produit hilbertien sera notée

$$\|X\|_2 = E[X^2]^{1/2}.$$

L'avantage d'une structure hilbertienne tient essentiellement dans l'existence de projection orthogonale sur un sous-espace fermé :

Théorème 1.1 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert (ici $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{F})$), et F un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$. Il existe une unique application linéaire continue p_F de $\mathcal{H}$ dans F telle que, pour tout $Z \in \mathcal{H}$, $p_F(Z)$ vérifie*

$$\|p_F(Z) - Z\|_2 = \min_{W \in F} \|W - Z\|_2.$$

Le projeté orthogonal d'une variable Z sur un sous-espace fermé F est donc l'élément de F le plus proche de Z pour la distance induite par $\|\cdot\|_2$, et $\|p_F(Z) - Z\|_2$ est par définition la distance de Z au sous-espace F. Autre façon de le dire : le projeté orthogonal est la meilleure approximation de Z par des éléments de F. Voir un cours d'analyse pour une démonstration de ce résultat.

Soit $\mathcal{B}$ une tribu sur Ω telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ (sous-tribu). On rappelle qu'une variable aléatoire réelle Z est $\mathcal{B}-$mesurable ssi, pour tout $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\{Z \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\} \in \mathcal{B}$. Traduction : tous les événements ayant trait à la variable Z sont contenus dans la tribu $\mathcal{B}$ (la tribu $\mathcal{B}$ contient toute l'information concernant la variable Z). Il est facile de montrer que $L^2(\mathcal{B}) \subset L^2(\mathcal{F})$ du fait de l'inclusion des tribus, et que $L^2(\mathcal{B})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\mathcal{F})$. Donc le Théorème 1.1 s'applique, et on dispose donc d'une application projection orthogonale sur $L^2(\mathcal{B})$, $p_{L^2(\mathcal{B})}$ l'application projection orthogonale sur $L^2(\mathcal{B})$.

Définition 1.2 ***Espérance conditionnelle par rapport à une sous-tribu.*** *Soit $X \in L^2(\mathcal{F})$. L'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu $\mathcal{B}$, est, par définition,*

$$E[X|\mathcal{B}] = p_{L^2(\mathcal{B})}(X).$$

Lien avec l'espérance. Bien entendu, l'espérance est un cas particulier d'espérance conditionnelle. Soit $\mathcal{B}_0$ la tribu triviale, i.e. $\mathcal{B}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$. On a $L^2(\mathcal{B}_0) =$ espace des fonctions constantes, et il est facile de voir que $E[X|\mathcal{B}_0] = E[X]$. $E[X]$ est donc la meilleure constante (au sens de la distance L^2) qui approche la variable X.

Attention ! $E[X]$ est une constante, puisque c'est un élément de $L^2(\mathcal{B}_0) =$ espace des fonctions constantes. Mais $E[X|\mathcal{B}]$ **est une variable aléatoire !** Plus précisément, $E[X|\mathcal{B}]$ est une variable $\mathcal{B}-$mesurable, quand X est $\mathcal{F}-$mesurable. Il faut comprendre $E[X|\mathcal{B}]$ comme une v.a. plus simplr que la v.a. X d'origine, puisqu'on a besoin d'une tribu moins riche ($\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$) pour définir le comportement de la variable X.

1.1.2 Espérance conditionnelle par rapport à des variables aléatoires

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathcal{K}}$ un ensemble de variables aléatoires de $L^2(\mathcal{F})$, et soit $Y \in L^2(\mathcal{F})$. On rappelle la notation $\sigma((X_k)_{k\in\mathcal{K}})$ pour désigner la plus petite tribu rendant les X_k mesurables. Autre façon de le dire, plus petite tribu contenant les événements $\{\forall i, X_i \in B_i\}$, pour tout ensemble $(B_k)_{k\in\mathcal{K}}$ d'éléments de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. $\sigma(X)$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$, on peut donc définir $L^2(\sigma(X))$ et l'espérance conditionnelle correspondante.

Interprétation importante : Voir $L^2(\sigma(X))$ comme l'espace des fonctions (L^2 bien entendu) des X_k.

Définition 1.3 ***Espérance conditionnelle par rapport à des v.a.*** *On définit*

$$E[Y|(X_k)_{k\in\mathcal{K}}] = E[Y|\sigma(X)].$$

Interprétation. Cette espérance conditionnelle, c'est la fonction de $X_1, ..., X_k, ...$ qui est la plus proche (au sens L^2) de Y. Là encore, c'est une **variable aléatoire** puisque les X_k sont des v.a.

Illustration sur une application. Retour sur l'exemple de la fortune en bourse. Je souhaite prédire ma fortune demain. J'ai placé ma fortune depuis le jour 1, jusqu'à aujourd'hui qui est le jour $n-1$. Jusqu'à présent, tout ce que j'ai comme données pour m'aider à prévoir, ce sont les valeurs $X_1, ..., X_{n-1}$ où X_j désigne ma fortune au jour j. La meilleure façon de prévoir X_n (meilleure au sens du risque quadratique) à partir de $X_1, ..., X_{n-1}$, c'est donc $E[X_n|X_1, ..., X_{n-1}]$. Si j'arrive à mettre la main sur cette espérance conditionnelle (ou en tout cas à l'estimer, en modélisant le comportement de la suite X_n, ce qui sera l'un des objets de ce cours), ma prévision est optimale au sens du risque quadratique, par rapport à toutes les prévisions basées sur les mêmes données $(X_1, ...X_{n-1})$.

Bien entendu, si je dispose d'informations supplémentaires, je peux améliorer ma prévision. Supposons que ma fortune soit composée d'actions de l'Olympique Lyonnais. Si j'observe $Y_j =$ résultat du club durant la précédente journée de championnat (0 si défaite, 1 si nul, 2 si victoire par exemple). Il est clair qu'en intégrant cette information, je vais pouvoir améliorer encore mon estimation de ma fortune demain : si le club vient de gagner un match, il y a de fortes chances que son action progresse et que ma fortune augmente, au contraire, s'il a perdu... Du coup, si j'observe les variables Y_i en plus des X_i, le Graal ce sera $E[X_n|X_1, Y_1, ...X_{n-1}, Y_{n-1}]$ (espérance conditionnelle par rapport à tout ce que j'ai observé jusqu'à présent).

1.1.3 Propriétés élémentaires

Soit Y, Z deux v.a. et X un vecteur aléatoire (ou plus généralement un ensemble de v.a.). On a les propriétés suivantes (qui marchent pareil pour $E[Y|\mathcal{B}]$) :

1. Linéarité : $\forall\lambda \in \mathbb{R},\ E[Y + \lambda Z] = E[Y|X] + \lambda E[Z|X]$.

2. $|E[Y|X]| \leq E[|Y||X]$.

3. $E[E[Y|X]^2] \leq E[Y^2]$.

4. Cauchy-Schwarz : $|E[YZ|X]| \leq (E[Y^2|X])^{1/2}(E[Z^2|X])^{1/2}$.

5. Hölder : pour (p, q) tels que $p^{-1} + q^{-1} = 1$,

$$|E[YZ|X]| \leq (E[|Y|^p|X])^{1/p}(E[|Z|^q|X])^{1/q}.$$

6. Si $Y \leq Z$ p.s., alors $E[Y|X] \leq E[Z|X]$.

7. Jensen : soit f une fonction convexe. Alors $E[f(Y)|X] \geq f(E[Y|X])$. (inégalité stricte si strictement convexe)

La démonstration de ces propriétés est élémentaire. Elle repose essentiellement sur les propriétés de l'application projection orthogonale. Soulignons également les propriétés suivantes qui sont particulièrement importantes :

8. Soit $B \in \sigma(X)$. $E[Y\mathbf{1}_B] = E[E[Y|X]\mathbf{1}_B]$.

9. Si Z est $\sigma(X)-$mesurable telle que $E[Y\mathbf{1}_B] = E[Z\mathbf{1}_B]$ pour tout $B \in \sigma(X)$, alors $Z = E[Y|X]$ (la réciproque étant vraie par la propriété précédente).

1.1.4 Extension à L^1

Dans ce cours, on considérera rarement (voire pas du tout) des variables qui sont dans L^1 mais pas dans L^2. Ce paragraphe n'est donc pas crucial pour le cours, mais il est quand même important de mentionner qu'on peut également définir la notion d'espérance conditionnelle dans L^1 par prolongement. En effet, l'application $Y \to E[Y|X]$ est une application linéaire continue (donc absolument continue) définie sur L^2, L^1 est complet, et L^2 est dense dans L^1. On peut donc utiliser le théorème de prolongement des applications uniformément continues dans les espaces de Banach pour définir l'espérance conditionnelle dans L^1 comme l'unique prolongement de l'espérance conditionnelle L^2 à L^1 tout entier (le résultat peut se trouver dans le livre "Analyse réelle et complexe" de Walter Rudin). Dans ce cas, la définition de l'espérance conditionnelle comme un minimum de distances quadratiques n'est plus valide, puisque $E[Y^2] = \infty$ pour $Y \in L^1 - L^2$. On préféra la définition suivante qui correspond à la propriété 9 :

Définition 1.4 ***Définition de l'espérance conditionnelle valide dans tout*** L^1. *Soit* $Y \in L^1$. *On note* $E[Y|X]$ *l'unique variable aléatoire* Z *telle que* Z *vérifie la propriété 9 de la section précédente.*

Cette définition est généralement moins pratique à manipuler quand il s'agit de déterminer $E[Y|X]$.

1.2 Méthodes de calcul

1.2.1 Propriétés de calcul fondamentales

Il est crucial de savoir manipuler parfaitement toutes les propriétés ci-dessous.

1. $E[E[Y|X]] = E[Y]$. (découle de la propriété 8. de la section précédente pour $B = \Omega$)

2. Soit $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ deux tribus. On a

$$E[Y|\mathcal{B}_2] = E[E[Y|\mathcal{B}_1]|\mathcal{B}_2].$$

   Deuxième version pour des variables aléatoires :

$$E[Y|X_1] = E[E[Y|X_1, X_2]|X_1].$$

3. Pour tout $p \geq 1$, si $Y \in L^p$, alors $E[Y|X] \in L^p$.

4. Si $Y \in \sigma(X)$ (i.e. $Y = f(X)$), alors

$$E[YZ|X] = YE[Z|X].$$

(autrement dit $E[f(X)Z|X] = f(X)E[Z|X]$.) Traduction : les fonctions de X se comportent comme des constantes vis à vis de l'espérance conditionnelle.

5. Si Y indépendant de X, alors $E[Y|X] = E[Y]$.

6. Convergence dominée : si $|X_n| \leq Z$ pour tout Z avec $E[Z] < \infty$, et que $X_n \to X$ p.s., alors $E[X_n|\mathcal{B}] \to E[X|\mathcal{B}]$.

1.2.2 Expression intégrale de l'espérance conditionnelle

Soit Y une v.a. et $X = (X_1, ..., X_d)$ un vecteur aléatoire. Si le vecteur aléaoire $(Y, X_1, ..., X_d)$ admet une densité $f_{YX}(y, x_1, ..., x_d)$, la proposition suivante donne l'expression explicite de l'espérance conditionnelle.

Proposition 2.1 *Soit* $f_X(x_1, ..., x_d) = \int f_{YX}(y, x_1, ..., x_d)dy$ *la densité de* $(X_1, ..., X_d)$. *Alors*

$$E[Y|X] = \frac{\int y f_{YX}(y, X_1, ..., X_d)dy}{f_X(X_1, ..., X_d)}.$$

Chapter 2

Généralités sur les processus stochastiques. Rappels concernant temps d'arrêt et martingales

Ce chapitre a pour objet de donner un certain nombre de généralités concernant la définition d'un processus stochastique, ainsi que concernant la notion de temps d'arrêt. La fin du chapitre propose un certain nombre de rappels concernant une catégorie de processus (déjà vue en cours de probabilités), les martingales.

2.1 Processus, filtrations

2.1.1 Processus stochastiques

Définition 1.1 *Soit E un ensemble (ensemble d'états du processus) muni d'une tribu $\mathcal{B}$, et T un ensemble quelconque. Un processus défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et indexé par T, est par définition une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t\in T}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(E, \mathcal{B})$.*

Dans ce cours, E sera (sauf mention contraire exceptionnelle) un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou éventuellement de $\mathbb{R}^k$ muni de la tribu des boréliens. Si E est un ensemble fini, on parlera d'un processus à **nombre d'états fini**. Si

$E \subset \mathbb{Z}$, on parle **d'espace d'états dénombrables**. Si E n'est pas discret ($[0,1]$ par exemple), on parle de processus à **espace d'états continu.**

L'ensemble T sera soit inclus dans $\mathbb{Z}$, soit dans $\mathbb{R}$. On utilise alors parfois le terme "d'espace des temps" pour désigner cet ensemble T. On parlera de dans discret quand $T \subset \mathbb{Z}$, de temps continu quand $T \subset \mathbb{R}$.

Néanmoins, en toute généralité, un processus stochastique peut être indexé par un ensemble beaucoup plus compliqué, par exemple par un espace de fonctions (par exemple $X_f = n^{-1} \sum_{i=1}^n f(Z_i)$, pour $(Z_i)_{1 \le i \le n}$ i.i.d. et f dans un ensemble de fonctions T).

Donnons quelques exemples de processus.

- X_n = capital à ma disposition au bout de n jours. $n \in T = \mathbb{N}$, et $E = \mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}$ (selon que l'on autorise ou pas des dettes).
- X_t = cours du CAC 40 à l'instant t d'une journée de cotations. Si t est exprimé en heures, on peut prendre par exemple $T = [0; 24[$. $E = \mathbb{R}^+$.
- X_t = nombre de clients entrant dans une poste entre un instant 0 et un instant t (exprimé en minutes, par exemple). Là encore, $T = \mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$. $E = \mathbb{N}$. Si la capacité de la poste est finie (au bout de M clients, on bloque l'accès parce qu'il y a trop de monde), $E = \{0, ..., M\}$.

2.1.2 Filtration naturelle d'un processus

Précisons encore une fois que l'on se place désormais définitivement dans le cas $T \subset \mathbb{Z}$ ou $T \subset \mathbb{R}$. L'une des propriétés de ces deux cas de figures est le fait que T est ordonné. La notion de filtration naturelle d'un processus fournit un cadre pour définir ce qui appartient au passé d'un processus (et qui est donc connu si on a observé le processus), et ce qui appartient au futur et n'est donc pas encore accessible.

Définition 1.2 *Soit un processus $(X_t)_{t \in T}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_{t'} : t' \le t\})$. La suite de tribus $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ est appelée filtration naturelle du processus $(X_t)_{t \in T}$.*

$\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_{t'} : t' \le t\})$ représente l'histoire du processus entre l'origine des temps et la date t. Les variables $\mathcal{F}_t-$mesurables seront donc les fonctions des $X_{t'}$ pour $t' \le t$. Si, pour $\omega \in \Omega$, j'ai pu observer le processus jusqu'à la date

t, je dispose de toute l'information nécessaire pour connaître exactement la valeur de $Y(\omega)$ quelle que soit Y une variable $\mathcal{F}_t-$mesurable (à plus forte raison une variable $\mathcal{F}_{t'}-$mesurable pour $t' \leq t$).

Illustration : Le prix d'un légume est indexé sur la moyenne de la production de ce fruit sur les trois derniers jours. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la production de légume le jour n, et $S_n = 1/3[X_n+X_{n-1}+X_{n-3}]$ la moyenne de production sur les trois derniers jours, à la date n. S_n est une variable $\mathcal{F}_n = \sigma(\{X_j : j \leq n\})-$mesurable. Nous sommes aujourd'hui à la date n_0, et je dispose de la connaissance du cours X_n depuis l'origine des temps jusqu'à X_{n_0}. Si je veux déterminer le prix de mes légumes aujourd'hui, j'ai besoin d'évaluer S_{n_0}. Pas de problème, je dispose de toute l'information nécessaire, S_{n_0} étant $\mathcal{F}_{n_0}-$mesurable. De même, si je veux retrouver le prix des légumes hier, j'ai tout ce dont j'ai besoin pour évaluer S_{n_0-1}. En revanche, si je veux prédire la valeur à laquelle je vendrai mes légumes dans deux jours, je m'intéresse à $S_{n_0+2} = 1/3[X_{n_0+2} + X_{n_0+1} + X_{n_0}]$. A moins d'une hypothèse supplémentaire sur les variables X_n, S_{n_0+2} n'est pas calculable. En revanche, pour essayer de le prévoir à partir de nos informations, on cherchera à évaluer $E[S_{n_0+2}|\mathcal{F}_{n_0}] = 1/3E[X_{n_0+2} + X_{n_0+1}|\mathcal{F}_{n_0}] + X_{n_0}/3$.

2.1.3 Filtration, processus adapté à une filtration

Plus généralement, on définit le concept de filtration.

Définition 1.3
- *Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ une suite de sous-tribus $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est appelée filtration ssi, par définition, $\mathcal{F}_{t'} \subset \mathcal{F}_t$ pour tout $t \leq t'$.*
- *Un processus $(X_t)_{t\in T}$ est dit adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ si, pour tout $t \in T$, X_t est une variable $\mathcal{F}_t-$mesurable.*

Dans la notion de filtration, on retrouve l'idée d'une information qui augmente avec le temps qui passe. Bien entendu, la filtration naturelle d'un processus est une filtration, et un processus est toujours adapté à sa filtration naturelle. L'intérêt de cette définition plus générale, est que dans de nombreuses applications, on dispose de plus d'informations que la simple histoire du processus. A chaque instant, on observe alors non seulement le processus qui nous intéressent, mais également d'autres processus qui peuvent apporter de l'information sur le phénomène étudié, informations qui doivent donc être intégrées pour améliorer nos prévisions, par exemple.

Pour revenir à l'exemple précédent de la vente de légumes. Si on observe également la quantité de précipitations Y_n pour le jour n, cette variable va nécessairement influer sur X_{n+1}, X_{n+2} etc. Il est donc plus intéressant de définir la filtration $\mathcal{F}'_n = \sigma(X_j : j \leq n) \cup \sigma(Y_j : j \leq n)$, et de prévoir S_{n_0+2} par $E[S_{n_0+2}|\mathcal{F}'_{n_0}]$.

Terminons par une terminologie classique.

Définition 1.4 *Etant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, et une filtration $(\mathcal{F})_{t\in T}$, on appelle espace probabilisé filtré le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\in T}, \mathcal{P})$.*

2.2 Temps d'arrêt, processus arrêtés

2.2.1 Notion de temps d'arrêt

Nous nous servirons essentiellement de la notion de temps d'arrêt en temps discret, i.e. dans le cas où l'on s'intéresse à un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 2.1 *Cas discret : Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration. Un temps d'arrêt adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ est une variable aléatoire T telle que*

- *T est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.*
- *Pour tout $n \geq 0$, l'événement $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.*

Parallèlement, on définit la notion de processus arrêté.

Définition 2.2 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, T un temps d'arrêt adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, et $X = (X_n)_{n\geq 0}$ un processus $\mathcal{F}_n-$adapté. On appelle processus arrêté par T le processus $X^T = (X_n^T)_{n\geq 0}$ défini comme $X_n^T = X_{\inf(T,n)}$, c'est à dire*

$$\begin{aligned} X_n^T(\omega) &= X_n(\omega) \text{ si } T(\omega) > n, \\ &= X_{T(\omega)}(\omega) \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Exemple de processus arrêté. On reprend l'exemple de la fortune $(X_n)_{n\geq 0}$. Soit s un réel (éventuellement négatif), seuil en dessous duquel on prononce la faillite. Je fais faillite à l'instant n si $X_n(\omega) \leq s$. Si j'ai fait faillite à l'instant n, le jeu en bourse s'arrête pour moi, et ma fortune n'évolue plus. On est donc en présence du processus arrêté X^T où $T(\omega) = \inf\{n : X_n(\omega) \leq$

$s\}$. Il est alors particulièrement important d'étudier la variable aléatoire T pour minimiser les risques de faillite.

Mentionnons tout de même la notion de temps d'arrêt en temps continu, même si nous ne l'utiliserons pas dans ce cours.

Définition 2.3 *Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une filtration. Un temps d'arrêt adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une variable aléatoire T telle que*

- *T est à valeurs dans $[0; +\infty]$.*
- *Pour tout $t \geq 0$, on a $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

2.2.2 Quelques propriétés des temps d'arrêt

1. **Mesurabilité d'ensembles liés à des temps d'arrêt.** Soit T un temps d'arrêt adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Les ensembles $\{T \leq n\}$ et $\{T > n\}$ sont dans $\mathcal{F}_n$. Par ailleurs, en notant $\mathcal{F}_\infty = \cup_{n\geq 0}\mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}_\infty$ est une tribu incluse dans $\mathcal{F}$, et $\{T = +\infty\} \in \mathcal{F}_\infty$.

2. **Temps d'arrêt fixe.** Pour tout $k \geq 0$, la variable constante $T = k$ p.s. est un temps d'arrêt pour n'importe quelle filtration.

3. **Opérations sur les temps d'arrêt.** Si S et T sont des temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, alors $S+T$, $\inf(S,T)$ et $\sup(S,T)$ sont des temps d'arrêt relativement à cette même filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

Attention ! En revanche, $S - T$ n'est pas forcément un temps d'arrêt !

2.2.3 Identité de Wald

Attention, l'identité ci-dessous n'est valable que pour des variables i.i.d.

Théorème 2.4 *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables **i.i.d.**, avec $E[|X_1|] < \infty$. Soit T un temps d'arrêt adapté à la filtration naturelle du processus $(X_n)_{n\geq 0}$, avec $E[T] < \infty$. Alors*

$$E\left[\sum_{n=1}^{T} X_n\right] = E[T]E[X_1].$$

Preuve. On définit

$$S_T = \sum_{n=1}^{T} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \mathbf{1}_{n \leq T}.$$

Or $\mathbf{1}_{n \leq T} \in \sigma(X_1, ..., X_{n-1})$, car T est un temps d'arrêt pour la filtration naturelle du processus. Donc, puisque X_n est indépendant de $(X_1, ..., X_{n-1})$, $E[X_n \mathbf{1}_{n \leq T}] = E[X_n]E[\mathbf{1}_{n \leq T}] = E[X_1]\mathbb{P}(T \geq n)$. Pour calculer $E[S_T]$, on intervertit somme et espérance, mais il faut justifier qu'on a le droit d'intervertir (les X_i ne sont pas nécessairement positifs). L'intervertion est légitime si

$$\sum_{n \geq 1} E[|X_n| \mathbf{1}_{T \geq n}] < \infty.$$

C'est le cas, car

$$\sum_{n \geq 1} E[|X_n| \mathbf{1}_{T \geq n}] = \sum_{n \geq 1} E[|X_n|]\mathbb{P}(T \geq n) = E[|X_1|] \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(T \geq n),$$

et on rappelle que $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(T \geq n) = E[T] < \infty$. On en déduit

$$E[S_T] = E[X_1]E[T].$$

■

2.3 Rappels sur les martingales

2.3.1 Définition

Définition 3.1 *Un processus $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ ssi, par définition,*

1. $(X_n)_{n \geq 0}$ *est adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$.
2. $\forall n \geq 0,\ E[|X_n|] < \infty$.
3. $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$.

Notons que pour une martingale, $E[X_n]$ est constante, et que $E[X_{n+p}|\mathcal{F}_n] = X_n$ pour tout $p \geq 0$.

Rappelons également la définition de sous-martingale et surmartingale.

Définition 3.2 *Un processus* $(X_n)_{n\geq 0}$ *est une sous-martingale (resp. surmartingale) relative à la filtration* $(\mathcal{F}_n)$ *ssi les 2 premières propriétés de la définition 3.1 sont vérifiées, et que* $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n$ *(resp.* $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n$*).*

Notons que $E[X_n]$ est une suite croissante dans le cas d'une sous-martingale, décroissante dans le cas d'une surmartingale.

2.3.2 Exemples

- Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes centrées. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $S_n = a + \sum_{k=0}^{n} Y_k$ est une martingale par rapport à la filtration $(\sigma(Y_1, ..., Y_n))_{n\geq 0}$.
- Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration quelconque, et Z une variable aléatoire. Alors $X_n = E[Z|\mathcal{F}_n]$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
- **Martingales et fonctions convexes.**

  Proposition 3.3 *Soit* $(X_n)_{n\geq 0}$ *une* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}-$*martingale, et soit* ϕ *une fonction convexe telle que* $E[|\phi(X_n)|] < \infty$ *pour tout* $n \geq 0$*. Alors* $\phi(X_n)$ *est une sous-martingale.*

  Preuve. Application de l'inégalité de Jensen. ■

2.3.3 Martingales et temps d'arrêt

Proposition 3.4 *Soit* $X = (X_n)_{n\geq 0}$ *une martingale (resp. une surmartingale) relativement à une filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$*, et* T *un temps d'arrêt pour cette même filtration. Le processus arrêté* $X^T = (X_{\inf(n,T)})_{n\geq 0}$ *est une martingale (resp. une surmartingale) pour la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$*.*

Preuve. On a la représentation

$$X_{\inf(n,T)} = X_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (X_{k+1} - X_k)\mathbf{1}_{k<T}.$$

L'intérêt de cette décomposition, c'est que $\mathbf{1}_{k<T} \in \mathbb{F}_k$. On a

$$X_{\inf(n+1,T)} - X_{\inf(n,T)} = \mathbf{1}_{n<T}(X_{n+1} - X_n),$$

et donc

$$E[X_{\inf(n+1,T)} - X_{\inf(n,T)}|\mathcal{F}_n] = \mathbf{1}_{n<T}E[(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n] = 0,$$

car $(X_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}-$martingale. ∎

Citons également un théorème d'arrêt pour les martingales. Définissons, pour un temps d'arrêt T relatif à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, définissons la tribu $\mathcal{F}_T$des événements survenant jusqu'à la date T (incluse).

Définition 3.5 *On définit, pour un temps d'arrêt T relatif à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$,*

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : \forall n, A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}.$$

Donnons à présent trois théorèmes d'arrêt. Le premier concerne la comparaison de deux temps d'arrêt. Le deuxième théorème concerne les temps d'arrêt bornés, d'où on déduit le troisième pour des martingales dominées.

Théorème 3.6 *Soient S et T deux temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, tels que $S \leq T$ p.s., et $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale adaptée à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Alors*

- $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$,
- $E[X_T|\mathcal{F}_S] = X_S$.

Preuve. Preuve de la première assertion uniquement. Soit $A \in \mathcal{F}_S$. On a

$$A \cap \{T = n\} = \cup_{0\leq k\leq n}[A \cap \{S = k\}] \cap \{T = n\},$$

puisque $S \leq T$ p.s. On $A \cap \{S = k\} \in \mathcal{F}_k$ par définition de $\mathcal{F}_S$, et $\mathcal{F}_k \subset F_n$. Comme $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$, on a $A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ par stabilité de la tribu $\mathcal{F}_n$. Ce qui prouve la première assertion. ∎

Théorème 3.7 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale (resp. surmartingale, resp. sous-martingale) relative à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Soit T un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ tel que $T \leq \tau < \infty$ p.s. pour un réel τ fixé. Alors*

$$E[X_T] = E[X_0]$$

(resp. $\leq$, resp. $\geq$).

Preuve. On a la décomposition suivante, pour tout $n \geq 0$,

$$X_{\inf(T,n)} = X_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{k<T}(X_{k+1} - X_k). \tag{2.3.1}$$

On l'applique ici pour $n = \tau$, puisque $X_{\inf(T,\tau)} = X_T$. Pour tout k, on a

$$E[\mathbf{1}_{k<T}(X_{k+1}-X_k)] = E[E[\mathbf{1}_{k<T}(X_{k+1}-X_k)|\mathcal{F}_k]] = E[\mathbf{1}_{k<T}(E[X_{k+1}|\mathcal{F}_k]-X_k)],$$

car $\mathbf{1}_{k<T} \in \mathcal{F}_k$. On utilise à présent que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, ou une surmartingale, ou une sous-martingale, pour en déduire le signe de $E[\mathbf{1}_{k<T}(X_{k+1} - X_k)]$. On déduit ensuite le résultat de (2.3.1). ■

En utilisant la proposition suivante, il est relativement aisé d'étendre le résultat du Théorème 3.7 au cas d'une martingale dominée, en considérant les temps d'arrêt $\inf(T, n)$, qui sont bornés, et en faisant tendre n vers l'infini.

Proposition 3.8 *Soit T un temps d'arrêt relatif à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, et $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus adapté à cette filtration. Si $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, alors*

$$X_{\inf(T,n)} \to X_T \text{ p.s.}$$

Preuve. Soit $A = \{T < \infty\}$. Pour tout $\omega \in A$, pour $n \geq T(\omega)$, $X_{\inf(T,n)} = X_T$, et $\mathbb{P}(A) = 1$. ■

Théorème 3.9 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale (resp. surmartingale, resp. sous-martingale) relative à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, telle que*

$$E[\sup_{n\geq 0} |X_{\inf(T,n)}|] < \infty.$$

Soit T un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ tel que

$$\mathbb{P}(T < \infty) = 1.$$

Alors $E[|X_T|] < \infty$, et

$$E[X_T] = E[X_0]$$

(resp. $\leq$, resp. $\geq$).

Preuve. Soit $n \geq 0$. Le temps d'arrêt $\inf(T, n)$ étant borné, on peut appliquer le Théorème 3.7, de sorte que $E[X_{\inf(T,n)}] = E[X_0]$ (resp. $\leq$, resp. $\geq$). Par ailleurs, $X_{\inf(T,n)} \to X_T$ p.s. par la Proposition précédente, et $|X_{\inf(T,n)}| \leq Z = \sup_n |X_{\inf(T,n)}|$, avec $E[Z] < \infty$. D'après le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, on en déduit que $E[X_{\inf(T,n)}] \to E[X_T]$, et le résultat suit. ■

2.3.4 Inégalités, et théorème de convergence des surmartingales

Il existe un grand nombre d'inégalités concernant les martingales qui se révèlent des outils précieux dans l'étude de leurs déviations. Nous citons ici l'inégalité maximale de Doob. Le théorème suivant, non moins important, concerne la convergence p.s. des surmartingales

Théorème 3.10 ***Inégalité de Doob.*** *Soit* $(X_n)_{n\geq 0}$ *une* ***sous-martingale positive*** *relative à une filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. *Soit* $\lambda > 0$. *Pour tout* n, *on a*

$$\lambda \mathbb{P}(\sup_{0\leq k\leq n} X_k > \lambda) < E[X_n].$$

Preuve. On définit

$$M_n = \{\max_{0\leq k\leq n} X_k > \lambda\} = \cup_{0\leq k\leq n}\{X_k > \lambda\}.$$

On définit le temps d'arrêt

$$T = \min\{k : 0 \leq k \leq n, X_k > \lambda\}\mathbf{1}_{M_n} + n\mathbf{1}_{M_n^c}.$$

Il s'agit bien d'un temps d'arrêt car T est à valeurs entières, et $\{T = k\}$ ne dépend que de $X_0, ..., X_k$. Il est clair que T est borné par n, et donc que $X_{\inf(n,T)} = X_T$. Dans le cas où $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, on peut appliquer le théorème d'arrêt pour les temps d'arrêt bornés. Comme X_n est ici une sous-martingale, il faut raisonner autrement en remarquant que $E[X_n] \geq E[X_T]$. En effet,

$$E[X_n] = \sum_{i=1}^{n} E[X_n\mathbf{1}_{T=i}] = \sum_{i=1}^{n} E[E[X_n|\mathcal{F}_i]\mathbf{1}_{T=i}] \geq \sum_{i=1}^{n} E[X_i\mathbf{1}_{T=i}].$$

Comme $X_T = \sum_{i=1} X_i\mathbf{1}_{T=i}$, on en déduit $E[X_n] \geq E[X_T]$.

De plus,

$$E[X_n] \geq E[X_T\mathbf{1}_{M_n}] + E[X_T\mathbf{1}_{M_n^c}] \geq E[X_T\mathbf{1}_{M_n}],$$

où la dernière inégalité vient de la positivité de $(X_n)_{n\geq 0}$. Par définition de M_n, on a

$$E[X_T\mathbf{1}_{M_n}] \geq \lambda E[\mathbf{1}_{M_n}] = \lambda \mathbb{P}(M_n),$$

d'où le résultat. ■

Corollary 3.11 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une **sous-martingale** relative à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout n, $X_n \in L^p$. Alors, pour tout $\lambda > 0$,*

$$\mathbb{P}(\sup_{0\leq k\leq n} X_k > \lambda) \leq \frac{\|X_n\|_p^p}{\lambda^p}.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que $\phi : x \to |x|^p$ est convexe et positive. Par la Proposition 3.3 et l'inégalité de Doob, on en déduit le résultat. ■

De la même façon, on peut montrer des résultats sur la borne inf. La preuve est analogue à celle de l'inégalité de Doob.

Théorème 3.12 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une **sous-martingale** relative à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Soit $\lambda > 0$. Pour tout n, on a*

$$\lambda\mathbb{P}(\inf_{0\leq k\leq n} X_k < -\lambda) \leq E[X_n^+] - E[X_0],$$

où X_n^+ désigne la partie positive de X_n.

Des résultats analogues peuvent être obtenus pour les surmartingales.

Théorème 3.13 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une **sur-martingale** (positive pour la première inégalité ci-dessous, de signe quelconque pour la seconde inégalité) relative à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Soit $\lambda > 0$. Pour tout n, on a*

$$\begin{aligned} \lambda\mathbb{P}(\max_{0\leq k\leq n} X_k > \lambda) &\leq E[X_0], \\ \lambda\mathbb{P}(\inf_{0\leq k\leq n} X_k < -\lambda) &\leq E[X_n^+] - E[X_n], \end{aligned}$$

où X_n^+ désigne la partie positive de X_n.

Exercice. Montrer ce résultat en s'inspirant de la démonstration de l'inégalité de Doob.

Terminons ce chapitre par un résultat fondamental de convergence des surmartingales. La preuve est technique, et nous admettrons donc le résultat. Les curieux peuvent se reporter au Théorème 11.1.1 page 157 du livre "Processus stochastiques" de D. Foata et A. Fuchs.

Théorème 3.14 ***Théorème de convergence des surmartingales.*** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une surmartingale relative à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|] < \infty$. Alors la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers une variable $X \in L^1$.*

Remarque : pour une surmartingale, la condition $\sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|] < \infty$ équivaut à $\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n-] < \infty$, où $X_n- = -\inf(0, X_n)$ désigne la partie négative de X_n. En particulier, la condition sera automatiquement vérifiée pour une surmartingale positive.

2.4 Exercice : ruine du joueur

Un joueur joue à pile ou face (pièce non nécessairement équilibrée). Il reçoit un euro de la banque s'il gagne (probabilité p), et donne un euro s'il perd (probabilité $1-p$). Il dispose d'une fortune initiale $S_0 = a$, la banque d'une fortune initiale b, et les deux joueurs jouent jusqu'à faire faillite. Les lancers de pièce sont supposés indépendants.

Soit $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables i.i.d. $Y_i = 1$ si le joueur remporte le $i-$ème lancer, $Y_i = -1$ sinon. On note S_n la fortune du joueur après la $n-$ème partie. On définit la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, ..., Y_n)$, et $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

1. Exprimer S_n en fonction de a et des Y_i.
2. Soit $\mathcal{G}_n$ la filtration naturelle du processus S_n. Montrer que $\mathcal{F}_n = \mathcal{G}_n$.

On définit
$$T = \inf\{n : S_n = 0 \text{ ou } S_n = a + b\}.$$

3. Montrer que T est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
4. Pour quelles valeurs de p le processus $(S_n)_{n\geq 0}$ est-il une martingale ? Une surmartingale ? Une sous-martingale ?
5. Justifier que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ (on distinguera les cas $p = 1/2$ et $p \neq 1/2$) en étudiant la convergence de S^T.
6. Soit $\pi = \mathbb{P}(S_T = a + b)$. Exprimer $E[S_T]$ en fonction de π.
7. Calculer π dans le cas $p = 1/2$ en utilisant un théorème d'arrêt.
8. Montrer que le processus $S'_n = (S_n - a)^2 - n$ est une martingale adaptée à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ lorsque $p = 1/2$. En déduire $E[T]$ dans le cas $p = 1/2$.

On suppose dorénavant $p \neq 1/2$.

9. Soit $s > 0$, et soit $W_n = s^{S_n}$. Déterminer s pour que W_n soit une martingale non constante.
10. En utilisant un théorème d'arrêt pour la martingale W_n, déterminer π dans le cas $p \neq 1/2$.
11. En considérant $Z_n = S_n - n(2p-1)$, montrer que Z_n est une martingale adaptée à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, et en déduire que $E[T] < \infty$. Calculer $E[T]$.
12. Que se passe-t-il quand la fortune de la banque tend vers l'infini ?

Chapter 3

Chaînes de Markov à temps discret

Les chaînes de Markov forment une catégorie simple de processus stochastiques à valeur dans un ensemble discret (les processus de Markov, non étudiés dans ce cours, généralisent la notion de chaînes de Markov en autorisant un espace d'états continu). Cette simplicité est notamment l'une des raisons de leur popularité, mais bien entendu, elle présuppose un certain nombre d'hypothèses (parfois contraignante) sur le modèle considéré. Dans ce cours, nous nous restreignons, pour simplifier, aux chaînes de Markov en temps discret, et nous allons essayer, à travers plusieurs exemples, de saisir comment se traduisent les hypothèses markoviennes dans un problème pratique.

3.1 Exemples de chaînes de Markov

3.1.1 Etat de santé

Un individu oscille entre trois états de santé au cours du temps. Si on note X_n son état de santé au jour n, $X_n = 0$ si l'individu est en bonne santé, $X_n = 1$ s'il est malade, $X_n = 2$ s'il est mort. On cherche à modéliser le comportement de la variable X_n.

Il paraît irréaliste de modéliser $(X_n)_{n\geq 0}$ comme un phénomène i.i.d. En effet, si $X_{n-1} = 1$ (l'individu est malade à la date $n-1$), il doit y avoir plus de chances que $X_n = 2$ que dans le cas où $X_{n-1} = 0$. Un modèle (un peu moins naïf), consiste à supposer X_n ne dépend du passé $(X_0, ..., X_{n-1})$ qu'à travers X_{n-1} (**hypothèse de Markov**). De ce fait, la connaissance de la loi du processus $(X_n)_{n\geq 0}$ revient à celle des probabilités $p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = i)$ pour $(i, j) \in \{0, 1, 2\}^2$, et pour tout n. Cette dépendance en n complique malheureusement le modèle. Le modèle le plus simple consiste à supposer que $p_{ij}^{(n)} = p_{ij}$ (**hypothèse d'homogénéité**, dans ce cours nous ne considérerons que des chaînes de Markov homogènes). Le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ admet alors une représentation sous forme de graphe (voir cours manuscrit).

Dans le graphe il a été supposé que $p_{2j} = 0$ pour $j = 0, 1$, car on suppose qu'il n'y a pas de résurrection. Par ailleurs, $\sum_{j=0}^{2} p_{ij} = 1$. Une fois posé ce modèle, il va être important de discuter les questions suivantes : vers quoi va évoluer X_n quand $n \to \infty$, au bout de combien de temps (en moyenne) va-t-on arriver dans l'état 2, combien de phases de maladie etc...

Il est néanmoins important de bien interpréter les deux hypothèses que nous avons faites (et leurs limites).

- Hypothèse de Markov : elle est contestable ici (comme souvent). On peut penser qu'un individu qui a été très souvent malade entre les instants 0 et $n-1$ a plus de chances de mourir à l'instant n qu'un individu qui n'a jamais été malade (car ses différentes phases de maladie l'ont affaibli). Si l'on veut prendre en compte cet aspect, il faut compliquer le modèle (mais du coup, il devient plus difficile de travailler avec).

- Hypothèse d'homogénéité : elle ne tient pas compte du vieillissement. Lorsque l'individu vieillit (n grand), la probabilité de mort devrait augmenter, or ce n'est pas le cas. Néanmoins, l'hypothèse d'homogénéité peu être une approximation satisfaisante de la réalité si on travaille sur une courte durée où l'influence du vieillissement n'est pas marquante.

3.1.2 Ruine du joueur

Le problème de ruine du joueur, traité avec les martingales dans le chapitre précédent, peut se représenter sous forme de chaîne de Markov homogène. Soit X_n la fortune du joueur. $X_0 = a$, l'ensemble des états possibles est $0, ..., a + b$ (b fortune de la banque). L'hypothèse de Markov : les lancers sont indépendants, et mon gain est toujours d'un euro, donc X_n ne peut prendre que les valeurs $X_{n-1}-1$ et $X_{n-1}+1$, indépendamment de $X_{n-2}, ..., X_0$. L'hypothèse d'homogénéité : la pièce ne change pas au cours du temps, la probabilité de gagner est toujours p.

3.1.3 Urne d'Ehrenfest

L'urne d'Ehrenfest est un modèle élémentaire utilisé pour modéliser la diffusion de gaz entre deux milieux. Les milieux A et B contiennent à eux deux a molécules. On étudie le nombre de molécules de gaz dans le milieu A au cours du temps. X_n est donc à valeurs dans $\{0, ..., a\}$. Les molécules sont numérotées de 1 à a. A l'instant n, on tire une molécules (de façon équiprobable), et on change cette molécule de milieu.

Une question qu'on peut se poser ce modèle : arrive-t-on à un état d'équilibre ?

3.1.4 File d'attente

$X_n =$ nombre d'individus dans une file d'attente. A chaque instant n, on a un nombre d'arrivées (aléatoires) et un nombre de sorties (aléatoires). On suppose que la loi du nombre d'arrivées et du nombre de départs ne dépend pas du nombre de personnes dans la chaîne, ce qui se traduit par une hypothèse de Markov : $X_{n+1} = X_n$+nombres d'arrivants dans la chaîne (éventuellement, nombre négatif si plus de départs) ne dépend pas de X_{n-1}, X_{n-2}... La limite de cette hypothèse, c'est notamment "l'instinct grégaire :" s'il y a beaucoup de monde dans une file d'attente (à plus forte raison si c'est un phénomène qui dure depuis longtemps), cela peut inciter plus facilement des gens à entrer dans la file d'attente (ou inversement). On fait une hypothèse d'homogénéité en supposant que cette loi du nombre de départs et d'arrivées ne dépend pas du temps qui passe. Là aussi, des limites peuvent apparaître : à un guichet de poste, les employés en bout de chaîne peuvent avoir tendance à avoir un comportement différent suivant les périodes de la journée, et donc influer sur la vitesse à laquelle les individus sortent de la file.

Questions que posent le modèle : au bout de combien de temps le système est-il engorgé, combien de caissiers faut-il mettre en bout de chaîne, etc...

3.1.5 Evolution d'une population

$X_n =$ nombre d'individus dans une population à la date n. De $n-1$ à n, il y a des naissances et des morts. Hypothèse markovienne : X_n ne dépend que de X_{n-1}. Dans certains cas, cette hypothèse ne va pas fonctionner : une longue période de faible natalité peut rendre plus probable l'arrivée prochaine d'un "baby boom". Hypothèse d'homogénéité : la loi des morts et naissance n'évolue pas quand n augmente. Contestable si l'on considère une éventuelle augmentation de l'espérance de vie, mais apparemment valable sur une courte période.

Questions : va-t-on vers une extinction ou une explosion de la population ? Au bout de combien de temps ?

3.2 Définition et propriétés élémentaires

3.2.1 Définition d'une chaîne de Markov

Dans la définition ci-dessous et par la suite, on suppose que $(X_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ pour simplifier. Mais tout autre ensemble discret peut faire l'affaire ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^k$, $\mathbb{Z}^k$...).

Définition 2.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ est une chaîne de Markov ssi, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$,*

$$\mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = i, X_{n-2} = i_{n-2}, ..., X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = i) = p_{ij}(n),$$

hypothèse de Markov. Par ailleurs, une chaîne de Markov sera dite homogène si $p_{ij}(n) = p_{ij}$.

Comme annoncé précédemment, on ne considérera que des chaînes de Markov homogènes dans le cadre de ce cours. Il est important de bien comprendre le sens de l'hypothèse de Markov (ainsi que ses limites). On utilise parfois la phrase "le futur ne dépend du passé qu'à travers le présent".

Dans la définition ci-dessus, le processus est implicitement muni de sa filtration naturelle. Plus généralement, on peut définir le concept de chaîne de Markov relative à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, ce qui est l'objet de la définition suivante. L'autre intérêt de la définition ci-dessous est qu'elle est adaptée à des processus qui ne sont pas forcément à valeurs discrètes, et que l'égalité d'espérance conditionnelle est vraie pour toute fonction f mesurable bornée.

Définition 2.2 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré. Le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans un ensemble discret E est une chaîne de Markov homogène relative à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ ssi*

- *$(X_n)_{n\geq 0}$ est $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}-$adapté.*

- *Il existe une suite* $(p_{ij})_{(i,j)\in E^2}$ *telle que, pour toute fonction* f *mesurable bornée,*
$$E[f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = Pf(X_n) := \sum_{j\in E} p_{X_n,j} f(j).$$

Par défaut, le terme chaîne de Markov désigne une chaîne de Markov munie de sa filtration naturelle (ce que nous rencontrerons le plus souvent dans le cadre de ce cours). Si la filtration est différente de la filtration naturelle, on mentionnera toujours "chaîne de Makov relative à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$."

3.2.2 Matrice de transition

La loi de la chaîne de Markov homogène est donc donnée par :

- l'ensemble des probabilités p_{ij},
- la donnée d'une loi initiale X_0 (voir plus bas).

On représente la liste des probabilités p_{ij} sous forme d'une matrice dite matrice de transition.

Définition 2.3

- *La probabilité* p_{ij} *est appelée* ***probabilité de transition de*** i ***vers*** j.
- *La matrice* $P = (p_{ij})_{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{N}}$ *est appelée* ***matrice de transition*** *de la chaîne de Markov homogène.*

Si l'espace des valeurs du processus est de cardinal fini, P est une "vraie" matrice, en revanche, en général, c'est une matrice de taille "infinie" (mais dénombrable). Ceci ne change rien en pratique pour les calculs de produits matriciels.

La proposition ci-dessous répertorie deux propriétés immédiates d'une matrice de transition.

Proposition 2.4

- *Pour tout* i, j *les coefficients* p_{ij} *de* P *sont positifs ou nuls.*
- *Pour tout* i, *on a* $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1$.

Une matrice vérifiant ces deux propriétés est appelée "matrice stochastique". Toute matrice stochastique peut être vue comme la matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène sur un espace probabilisé approprié.

Remarque : Structure de graphe. Une chaîne de Markov a une structure de graphe sous-jacente (voir les illustrations dans les exemples). Les sommets du graphe sont les états. Les arêtes du graphe sont étiquetées (par les probabilités p_{ij}). La matrice d'adjacence peut se déduire de la matrice de transition. Le coefficient (i, j) de la matrice d'adjacence correspondante vaudra 0 si $p_{ij} = 0$, 1 sinon. La théorie des chaînes de Markov utilise ainsi une partie des propriétés de la théorie des graphes pour répondre à un certain nombre de questions (par exemple accessibilité entre deux états, décomposition en classes...)

3.2.3 Relation de Chapman-Kolmogorov

La matrice de transition nous donne la loi de X_k sachant X_{k-1}. Qu'en est-il de la loi de X_{k+n} sachant X_k ? En utilisant l'hypothèse d'homogénéité, il s'agit de la loi de X_n sachant X_0. Notons

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i),$$

et $P^{(n)}$ la matrice des $p_{ij}^{(n)}$. La relation de Chapman-Kolmogorov montre un des intérêts de l'utilisation des matrices de transition : la matrice $P^{(n)}$ se déduit très simplement de P comme sa puissance $n-$ième.

Théorème 2.5 ***Relation de Chapman-Kolmogorov.*** *On a, pour tout* $n \geq 0$,

$$P^{(n)} = P^n.$$

Preuve. On raisonne par récurrence.

Initialisation : le résultat est vrai pour $n = 0$, $P^0 = Id = P^{(0)}$, et pour $n = 1$ de façon évidente.

Hypothèse de récurrence : On suppose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ que $P^{(n)} = P^n$.

Propagation : en utilisant que $P^{n+1} = P^n P$, et en notant p_{ij}^{n+1} le coefficient d'indice (i, j) de la matrice P^{n+1}, on a

$$p_{ij}^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{n} p_{kj}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, $p_{ik}^n = p_{ik}^{(n)}$, d'où

$$\begin{aligned} p_{ij}^{n+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k | X_0 = i) \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = k). \end{aligned}$$

En utilisant l'homogénéité, $\mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = k) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = k)$, et donc

$$\begin{aligned} p_{ij}^{n+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k | X_0 = i) \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = k) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_0 = i) = p_{ij}^{(n+1)}. \end{aligned}$$

Conclusion : par théorème de récurrence, le résultat est vrai pour tout $n \geq 0$. ■

Corollary 2.6 *Pour tous m et $n \geq 0$,*

$$P^{(m+n)} = P^{(m)} P^{(n)}.$$

Preuve. Immédiate. ■

Corollary 2.7 *La matrice $P^{(n)}$ est une matrice stochastique.*

La preuve découle là aussi immédiatement de la relation de Chapman-Kolmogorov. En particulier, on a là une démonstration du fait que le processus $(X_{nm})_{m \geq 0}$ est une chaîne de Markov, quel que soit $n \geq 1$.

3.2.4 Loi initiale de la chaîne

A partir de la matrice de transition, on peut donc reconstruire toute la loi de la chaîne de Markov conditionnellement à X_0. Pour connaître la loi de cette chaîne de façon complète, il faut donc la donnée d'une mesure de probabilité initiale.

Définition 2.8 *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov. On appelle* ***loi initiale*** *de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ la loi de probabilité de X_0.*

Comme X_0 est à valeurs dans $\mathbb{N}$, la loi de probabilité initiale peut être représentée sous forme vectorielle.

Définition 2.9 ***Représentation vectorielle de la loi initiale.***
Soit $\mu_i = \mathbb{P}(X_0 = i)$. On identifiera (léger abus de notations) la loi initiale μ de la chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\geq 0}$ avec le vecteur

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Si on note P^μ la loi de la chaîne de Markov homogène de loi initiale μ et de matrice de transition P, on dispose des relations suivantes.

Proposition 2.10 *On a :*

- $\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_n = i_n) = \mu_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} ... p_{i_{n-1} i_n}$.
- $\mathbb{P}(X_n = i) = (\mu^T P^n)_i$.
- $\mathbb{P}(X_k = i_k, X_{k+1} = i_{k+1}, ..., X_{k+p} = i_{k+p}) = p_{i_k i_{k+1}} ... p_{i_{k+p-1} i_{k+p}} (\mu^T P^k)_{i_k}$.

Preuve. La première assertion est immédiate. Pour la deuxième assertion, on utilise le fait que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = i) &= E[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{X_n = i, X_0 = k}] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = i | X_0 = k) E[\mathbf{1}_{X_0 = k}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = i | X_0 = k) \mathbb{P}(X_0 = k). \end{aligned}$$

En utilisant la relation de Chapman-Kolmogorov, il vient

$$\mathbb{P}(X_n = i) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ki}^n \mu_k = (\mu^T P^n)_i.$$

Pour la troisième assertion,

$$\mathbb{P}(X_k = i_k, X_{k+1} = i_{k+1}, ..., X_{k+p} = i_{k+p}) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{i_k i_{k+1}} ... p_{i_{k+p-1} i_{k+p}} \mathbb{P}(X_k = i_k | X_0 = i) \mu_i,$$

d'où le résultat. ∎

3.3 Classification des états

3.3.1 Relation d'accessibilité, de communication

Comme dans un graphe, on peut définir la relation d'accessibilité entre deux états (sommets du graphe).

Définition 3.1 ***Accessibilité***

- *L'état j est dit* ***accessible en*** n ***étapes à partir de l'état*** i *ssi* $p_{ij}^{(n)} \neq 0$.
- *L'état j est dit* ***accessible en à partir de l'état*** i *ssi il existe $n \geq 0$ tel que j soit accessible à partir de i en n étapes. On notera $i \hookrightarrow j$.*

Il s'agit d'une relation symétrique et transitive, mais pas d'une relation d'ordre ni d'une relation d'équivalence, car elle n'est ni symétrique, ni anti-symétrique. Pour définir une relation d'équivalence (qui permettra donc de partitionner les états de la chaîne de Markov en classes d'équivalence), il faut donc introduire de la symétrie dans la relation d'accessibilité.

Définition 3.2 ***Communication***

On dit que l'état i ***communique*** *avec l'état j ssi $i \hookrightarrow j$ et $j \hookrightarrow i$, et on note $i \longleftrightarrow j$.*

Proposition 3.3 *La relation de communication est une relation d'équivalence.*

Preuve. Une relation d'équivalence est réflexive, symétrique, transitive.

Réflexivité. On a $i \hookrightarrow i$ car $p_{ii}^{(0)} = 1$. Donc $i \longleftrightarrow i$.

Symétrie. Si $i \longleftrightarrow j$, on a $i \hookrightarrow j$ et $j \hookrightarrow i$, donc, par définition, $j \longleftrightarrow i$.

Transitivité. On suppose $i \longleftrightarrow j$ et $j \longleftrightarrow k$. Comme $i \hookrightarrow j$, il existe n_{ij} tel que $p_{ij}^{(n_ij)} > 0$, et comme $j \hookrightarrow k$, il existe n_{jk} tel que $p_{jk}^{(n_ik)} > 0$. Or

$$p_{ik}^{n_{ij}+n_{jk}} > \mathbb{P}(X_{n_{ij}+n_{jk}} = k | X_{n_{ij}} = j)\mathbb{P}(X_{n_{ij}} = j | X_0 = i) = p_{jk}^{(n_ik)} p_{ij}^{(n_ij)} > 0.$$

Donc $i \hookrightarrow k$, et on montre de même $k \hookrightarrow i$. ■

A partir de cette relation d'équivalence, on va introduire une partition des états en classes d'équivalence.

Proposition 3.4 *Soit* $(X_n)_{n\geq 0}$ *une chaîne de Markov dont l'espace d'états (discret) est* E*. Il existe une unique partition de* E *en sous-ensembles* $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *(classes d'équivalences) telle que*

$$(j,k) \in C_i \Leftrightarrow j \longleftrightarrow k.$$

Preuve. Découle des propriétés d'une relation d'équivalence. ■

Définition 3.5 ***Chaîne de Markov irréductible.***
Une chaîne de Markov sera dite irréductible si la partition en classes d'équivalence est réduite à un seul élément (E tout entier).

Traduction : dans une chaîne de Markov irréductible, tous les états communiquent entre eux.

3.3.2 Quelques exemples.

Exercice : déterminer les classes d'équivalence des chaînes de Markov de matrice de transition suivantes :

1.
$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix},$$

2.
$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

3.
$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

4. Etudier les chaînes présentées dans les exemples 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3.

3.3.3 Etats de retour, de non retour, absorbants

Dans la relation de communication, tout état i communique avec lui-même étant donné que $p_{ii}^{(0)} = 1$. Néanmoins, dans certains cas, on ne revient jamais au point i à une date ultérieure.

Pour cette raison, on donne un nom à des états présentant cette propriété.

Définition 3.6

- *Un état est dit de* ***non-retour*** *si* $p_{ii}^{(n)} = 0$ *pour tout* $n \geq 1$.
- *Un état est dit de* ***retour*** *si* $p_{ii}^{(n)} \neq 0$ *pour un* $n \geq 1$.
- *Un état est dit état* ***absorbant*** *si* $p_{ii}^{n} = 1$ *pour tout* $n \geq 1$.

Exercice : Déterminer les états de retour, non-retour, absorbants, sur les exemples précédents.

3.3.4 Etats récurrents et transients

Toujours dans l'optique de cerner le comportement de la chaîne après passage dans un état i, on s'intéresse à distinguer les états où l'on revient indéfiniment au cours du temps dans cet état, de ceux où l'on ne revient qu'un nombre fini de fois. Définissons le nombre de passages dans un état i au cours du temps :

$$N_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{X_n = i}.$$

N_i désigne le nombre de passage dans l'état i.

Définition 3.7 ***Récurrence et transience.***

- *Un état i est dit récurrent si* $E[N_i | X_0 = i] = +\infty$.
- *Un état i est dit transient si* $E[N_i | X_0 = i] < \infty$.

Ce type de condition se traduit sur la matrice de transition P de la chaîne. On a la proposition suivante.

Proposition 3.8

- *i est un état récurrent ssi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty.$$

- *i est un état transient ssi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty.$$

On rappelle que $p_{ii}^{(n)}$ désigne le coefficient d'indice (i,i) de la matrice P^n.
Preuve. On a

$$E[N_i|X_0 = i] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = i|X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}.$$

D'où le résultat. ■

Remarque 1. Nous verrons également d'autres caractérisation de la récurrence et de la transience en terme de temps de retour en i.

Remarque 2. Comme l'on s'y attend, les états absorbants sont des états récurrents, et les états de non-retour sont des états transients. En effet, pour un état de non-retour i, on a $p_{ii}^{(n)} = 0$ pour tout $n \geq 1$, et $p_{ii}^{(n)} = 1$ pour tout n pour un état absorbant.

Montrons à présent que la propriété de transience ou de récurrence est une propriété de classe (i.e. tous les éléments d'une classe sont soit tous transients, soit tous récurrents). On parle alors de classe transiente ou de classe récurrente.

Proposition 3.9 *Soit i et j des états dans la même classe d'équivalence pour la communication. Alors i récurrent $\Longleftrightarrow$ j récurrent (et de même lorsqu'ils sont transients).*

Preuve. Comme $i \longleftrightarrow j$, il existe n_i et n_j tels que $p_{ij}^{(n_i)} > 0$ et $p_{ji}^{(n_i)} > 0$. On a alors

$$p_{jj}^{(n+n_i+n_j)} \quad \geq \quad \mathbb{P}(X_{n_j} = i, X_{n+n_j} = i, X_{n+n_i+n_j} = j|X_0 = j).$$

Cette dernière probabilité est égale à

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+n_i+n_j} = j|X_{n+n_j} = i, X_{n_j} = i, X_0 = j)\mathbb{P}(X_{n+n_j} = i|X_{n_j} = i, X_0 = j) \\
&\qquad\qquad \times\mathbb{P}(X_{n_j} = i|X_0 = j) \\
&= \mathbb{P}(X_{n+n_i+n_j} = j|X_{n+n_j} = i)\mathbb{P}(X_{n+n_j} = i|X_{n_j} = i)\mathbb{P}(X_{n_j} = i|X_0 = j),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'hypothèse markovienne. Ce qui se réécrit $p_{ij}^{(n_i)} p_{ii}^{(n)} p_{ji}^{(n_j)}$. On a donc

$$\sum_{n\geq 0} p_{jj}^{(n+n_i+n_j)} \geq p_{ij}^{(n_i)} p_{ji}^{(n_j)} \sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)}.$$

Donc si i est récurrent, alors j est récurrent. En inversant les rôles de j et i on conclut à l'équivalence. ■

On distingue également deux types d'états récurrents, récurrents positifs et récurrents nuls.

Définition 3.10 *Si* $\limsup_n p_{i,i}^{(n)} > 0$, *l'état est positif, nul sinon.*

On montre qu'il s'agit d'une propriété de classe. Un état transient est nécessairement nul.

3.3.5 Périodicité

Toujours dans l'esprit de traduire les différents comportements possibles des trajectoires d'une chaîne de Markov, on introduit la notion de périodicité. La question à laquelle on essaie de répondre : le temps qui sépare deux passages successifs à l'état i est-il (ou non) multiple d'un temps minimum ?

Définition 3.11

- *On appelle période de l'état i (on notera $d(i)$) le pgcd de l'ensemble des $n \geq 1$ tels que $p_{ii}^{(n)} > 0$ (par convention, pour un état de non-retour, $d(i) = \infty$).*
- *Si $d(i) = 1$, alors l'état i est dit apériodique. Si $d(i) = d > 1$, l'état est dit périodique de période d.*

La proposition suivante montre que la périodicité est une propriété de classe.

Proposition 3.12 *Si $i \longleftrightarrow j$, alors $d(i) = d(j)$.*

Preuve. On suppose $i \longleftrightarrow j$. Donc il existe n_i et n_j tels que $p_{ij}^{(n_i)} > 0$ et $p_{ji}^{(n_j)}$. Par ailleurs, i étant périodique de période $d(i)$, $p_{ii}^{(d(i))} > 0$. De même que dans la preuve de la proposition 3.9,

$$p_{jj}^{n_i+n_j+d(i)} \geq p_{ji}^{n_j} p_{ij}^{(n_i)} p_{ii}^{(d(i))} > 0,$$

donc $n_i+n_j+d(i)=\alpha d(j)$. Par ailleurs, par définition de la période, $p_{ii}^{2d(i)} \geq 0$, donc de même $d(j)$ divise $n_i+n_j+2d(i)=\beta d(j)$. On en déduit que $d(i)=(\beta-\alpha)d(j)=\gamma d(j)$. Donc $d(j)$ divise $d(i)$. En inversant les rôles de i et j, on montre que $d(i)$ divise $d(j)$, et donc $d(i)=d(j)$. ■

On parlera donc de classe périodique de période d, ou de classe apériodique.

Exercice. Déterminer la période des classes des chaînes de Markov de matrice de transition suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.4 Chaînes de Markov et temps d'arrêt

3.4.1 Temps d'atteinte

Une autre façon de caractériser la propriété de récurrence consiste à introduire le temps d'atteinte de l'état i.

Définition 4.1 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov. On définit T_i temps d'atteinte de l'état i comme*

$$T_i = \inf\{n \geq 1 : X_n = i\}.$$

Attention au $n \geq 1$ dans la définition ! Dans la définition de ce temps, on ne s'intéresse qu'au comportement de la chaîne après initialisation. Il est facile de montrer que T_i est un temps d'arrêt pour la filtration naturelle de la chaîne.

On peut caractériser la loi de T_i par la loi initiale de la chaîne, et la suite des

$$f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(T_j = n | X_0 = i).$$

On pose par convention
$$f_{ij}^{(0)} = 0.$$

Les $f_{ij}^{(n)}$ peuvent ensuite se déduire des p_{ij} de la façon suivante.

Théorème 4.2 *Pour tout $n \geq 0$,*

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

Preuve. La relation est vérifiée pour $n = 0$ avec les convention adoptées. On suppose $n \geq 1$. On décompose l'événement $\{X_n = j | X_0 = i\}$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_n = j, T_j = k | X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_j = k | X_0 = i) \mathbb{P}(X_n = j | T_j = k, X_0 = i) \\ p_{ij}^{(n)} &= \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} \mathbb{P}(X_n = j | T_j = k, X_0 = i). \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\mathbb{P}(X_n = j | T_j = k, X_0 = i) = p_{jj}^{(n-k)}$. Pour cela, on observe que $\{T_j = k, X_0 = i\} = \{X_0 = i, X_1 \neq j, ..., X_{k-1} \neq j, X_k = j\}$. Donc, par la propriété de Markov,

$$\mathbb{P}(X_n = j | T_j = k, X_0 = i) = \mathbb{P}(X_n = j | X_k = j) = \mathbb{P}(X_{n-k} = j | X_0 = j) = p_{jj}^{(n-k)}.$$

■

3.4.2 Application à la récurrence

On définit également

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(T_j < \infty | X_0 = i).$$

Le théorème suivant relie temps d'atteinte de l'état i et récurrence de cet état.

Théorème 4.3 *L'état i est récurrent ssi $f_{ii} = 1$, transient ssi $f_{ii} < 1$.*

f_{ii} s'interprète comme la probabilité que le processus, une fois passé par l'état i, revienne un jour dans l'état i.

Preuve. Montrons que $\mathbb{P}(N_i \geq l | X_0 = i) = f_{ii}^l$. Pour cela, calculons

$$\mathbb{P}(\exists n_1, n_2, X_{n_1} = X_{n_2} = i | X_0 = i) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\exists m > 0 : X_{n+m} = i, \forall k < m X_{n+k} \neq i | X_n = i) \mathbb{P}(T_i = n | X_0 = i) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\exists m > 0 : X_m = i, \forall k < m X_k \neq i | X_0 = i) \mathbb{P}(T_i = n | X_0 = i) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_i = m | X_0 = i) \mathbb{P}(T_i = n | X_0 = i) = f_{ii}^2.$$

De même, la probabilité de au moins l séjours en i partant de i est f_{ii}^l. D'où le résultat. ■

3.4.3 Quelques autres temps d'arrêt classiques

Citons quelques autres temps d'arrêt classiques utilisés pour des chaînes de Markov.

Temps d'atteinte d'une classe C: $T = \inf\{n \geq 0 : X_n \in C\}$.

Temps de sortie d'une classe C : $T = \inf\{n \geq 0 : X_n \notin C\}$.

Temps de retour au point de départ : $T = \inf\{n \geq 1 : X_n = X_0\}$.

...

Attention ! Le temps de sortie de la classe C, $A = \sup\{n \geq 0 : X_n \in C\}$ n'est pas un temps d'arrêt !

3.4.4 Propriété de Markov forte

L'hypothèse de Markov stipule que la loi de X_n sachant son passé ne dépend que de X_{n-1}. La propriété de Markov forte prolonge ce résultat dans le cas où l'on ne regarde plus à n fixé, mais à un temps d'arrêt (aléatoire) T.

Théorème 4.4 ***Propriété de Markov forte.*** *Soit T un temps d'arrêt adapté à une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de matrice de transition P, et $\mathcal{F}_T$ la* *tribu associée au temps d'arrêt T. Soit f une fonction mesurable positive ou bornée, alors*

$$E[f(X_{m+T})|\mathcal{F}_T] = E_{X_T}[f(X_m)] = \sum_{j=0}^{n} p_{X_T j}^{(m)} f(j),$$

sur l'ensemble $\{T < \infty\}$, où E_x désigne l'espérance par rapport à la chaîne de Markov de matrice de transition P, et de mesure initiale δ_x.

Conséquence : Conditionnellement à X_T, le processus $(X_{T+m})_{m\geq 0}$ est une chaîne de Markov de même matrice de transition que $(X_n)_{n\geq 0}$, et de loi initiale δ_{X_T}, où δ_j désigne la mesure de Dirac au point j.

Preuve. Utilisons la caractérisation 9 de la section 1.1.3 pour l'espérance conditionnelle. Soit A un événement de $\mathcal{F}_T$. Par définition de $\mathcal{F}_T$, A vérifie, pour tout n, $A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$. On a, sur $\{T < \infty\}$,

$$\begin{aligned}
E[f(X_{m+T})\mathbf{1}_A] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[f_{X_{m+T}}\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{T=n}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E[E[f_{X_{m+n}}\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{T=n}|X_n]] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E[E[f_{X_{m+n}}|X_n]\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{T=n}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E[E_{X_n}[f_{X_m}]\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{T=n}].
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$E[E_{X_T}[f(X_m)]\mathbf{1}_A] = \sum_{n=0}^{\infty} E[E_{X_n}[f(X_m)]\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{T=n}],$$

et $E_{X_T}[f(X_m)]$ est bien $\mathcal{F}_T-$mesurable. ■

Illustrons ce résultat sur une application : la détermination de la loi de N_i à partir des probabilités f_{ii}.

Proposition 4.5 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène. Soit i un état transient. On a*

$$\mathbb{P}(N_i = k|X_0 = i) = (1 - f_{ii})f_{ii}^k,$$

et

$$\mathbb{P}(N_i = k | X_0 = j) = f_{ji}(1 - f_{ii}) f_{ii}^{k-1},$$

pour $i \neq j$.

Preuve. On définit $N_i' = \sum_{n=T_i+1}^{\infty} \mathbf{1}_{X_n = i}$ sur $\{T_i < \infty, X_0 = i\}$, $N_i' = 0$ sinon. En appliquant la propriété de Markov forte, on déduit

$$\mathbb{P}(N_i' = k | T_i < \infty, X_0 = i) = \mathbb{P}(N_i = k | X_0 = i).$$

Donc

$$\mathbb{P}(N_i = k+1 | T_i < \infty, X_0 = i) = \mathbb{P}(N_i' = k | T_i < \infty, X_0 = i) = \mathbb{P}(N_i = k | X_0 = i).$$

On en déduit

$$\mathbb{P}(N_i = k + 1 | X_0 = i) = f_{ii} \mathbb{P}(N_i = k | X_0 = i).$$

On en déduit que $\mathbb{P}(N_i = k | X_0 = i)$ est une suite géométrique de raison f_{ii}, et de premier terme $1 - f_{ii}$, d'où le résultat.

De même, on définit $N_i' = \sum_{n=T_i+1}^{\infty} \mathbf{1}_{X_n = i}$ sur $\{T_i < \infty, X_0 = j\}$, et on a

$$\mathbb{P}(N_i' = k | T_i < \infty, X_0 = j) = \mathbb{P}(N_i = k | X_0 = j).$$

Donc

$$\mathbb{P}(N_i = k+1 | T_i < \infty, X_0 = j) = \mathbb{P}(N_i' = k | T_i < \infty, X_0 = j) = \mathbb{P}(N_i = k | X_0 = i).$$

On en déduit

$$\mathbb{P}(N_i = k + 1 | X_0 = j) = f_{ji} \mathbb{P}(N_i = k | X_0 = i) = f_{ji}(1 - f_{ii}) f_{ii}^{k}.$$

■

On en déduit immédiatement les relations suivantes.

Proposition 4.6 *On a, pour un état i transient,*

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} p_{jj}^{(n)} &= \frac{1}{1 - f_{jj}}, \\ \sum_{n \geq 0} p_{ji}^{(n)} &= \frac{f_{ji}}{1 - f_{ii}}. \end{aligned}$$

Comme corollaire, on arrive ainsi à montrer que toute chaîne de Markov ayant un nombre fini d'états admet au moins un état récurrent. En particulier, les états d'une chaîne de Markov irréductible à espace d'états fini sont tous récurrents.

Proposition 4.7 *Une chaîne de Markov ayant un nombre fini d'états possède au moins un état récurrent.*

Preuve. Soit N le nombre d'états de la chaîne de Markov. On a, pour tout n, $\sum_{i,j} p_{i,j}^{(n)} = N$. D'où $\sum_{n\geq 0}\sum_{i,j} p_{i,j}^{(n)} = \infty$, ce qui aboutit à une contradiction si tous les états sont transients, en applicant la proposition précédente. ■

3.5 Invariance, stationnarité, théorème ergodique

3.5.1 Fonctions invariantes

On s'intéresse à $f(X_n)$, où f est donc une fonction définie sur $\mathbb{N}$. De même qu'une mesure sur $\mathbb{N}$ peut se représenter par un vecteur, on identifie f avec

$$f \leftrightarrow \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(n) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Avec cette notation,

$$E[f(X_n)|X_{n-1} = i] = (Pf)_i,$$

où P désigne la matrice de transition. Une fonction $P-$invariante est une fonction qui vérifie $Pf = f$, en d'autres termes, elle s'identifie avec un vecteur propre de la matrice P associé à la valeur propre 1. L'intérêt de ces applications invariantes tient dans la structure de martingale du processus $(f(X_n))_{n\geq 0}$, qui permet donc de montrer des résultats de convergence.

Proposition 5.1 *Soit f une application $P-$invariante telle que $E[|f(X_n)|] < \infty$ pour tout n. Alors $f(X_n)$ est une martingale adaptée à la filtration naturelle de $(X_n)_{n\geq 0}$.*

La preuve est immédiate.

Une application constante (qui s'identifie au vecteur λe où e désigne le vecteur dont chaque coordonnée vaut 1, et $\lambda \in \mathbb{R}$) est toujours invariante en utilisant la définition d'une matrice stochastique (d'où il vient que P admet toujours la valeur propre 1). En revanche, il est plus intéressant de chercher des martingales non constantes, et donc des applications invariantes non constantes. Elles n'existent pas toujours. Ainsi, si on prend la chaîne à deux états, de matrice de transition

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{pmatrix},$$

avec $p, q \neq 0, 1$, il n'existe pas d'application $P-$invariante non constante.

3.5.2 Mesure stationnaire

Théorème 5.2 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P* ***récurrente irréductible.*** *Il existe une mesure $P-$invariante μ sur E, espace d'états de la chaîne.*

- *Si $\mu(E) < \infty$, il existe une unique mesure de probabilité π sur E qui soit $P-$invariante, et*

$$\forall x \in E, \pi(x) = \frac{1}{E[T_x | X_0 = x]}.$$

- *Si $\mu(E) = \infty$, alors pour tout x, $E[T_x|X_0 = x] = \infty$.*

Preuve. Arguments de la preuve dans le cas où le nombre d'états de la chaîne est fini. On peut montrer que la matrice de transition d'une chaîne de Markov irréductible est irréductible au sens des matrices. On rappelle qu'une matrice réductible est une matrice A telle qu'il existe une matrice de permutation P_σ telle que

$$P_\sigma^{-1} A P_\sigma = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

dans le cas contraire la matrice est dite irréductible.

Le théorème de Perron-Frobenius (conséquence du Théorème de point fixe de Schauder) assure qu'une matrice P^T ayant tous ses coefficients positifs admet un vecteur propre à coefficients tous positifs associé à la valeur propre $\rho(P^T)$, où $\rho(P^T)$ désigne le rayon spectral, i.e. la valeur absolue de la plus grande valeur propre de P^T. Du fait que P est une matrice stochastique, on vérifie facilement que $\rho(P) = \rho(P^T) = 1$. On a donc l'existence d'une mesure (positive) invariante.

Si de plus, la matrice P est irréductible, le théorème de Perron-Frobenius assure que la dimension de l'espace propre associé à la valeur 1 est 1. D'où le résultat. ■

3.5.3 Interprétation de la mesure stationnaire

Il y a plusieurs façons d'envisager la mesure stationnaire. $\pi(i)$ s'interprète comme la fréquence moyenne de séjour dans l'état i. Par ailleurs, on peut voir la mesure stationnaire comme une position stationnaire vers laquelle évolue le système.

Le Théorème suivant (admis) fournit la convergence en loi de X_n dans certains cas.

Théorème 5.3 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible récurrente positive et apériodique. Alors, quelle que soit la loi initiale de la chaîne, X_n converge en loi vers une v.a. de loi π, où π désigne l'unique mesure stationnaire. (on dit que la chaîne est ergodique)*

On peut trouver une preuve dans Revuz (1975).

3.5.4 Théorème ergodique

Le premier théorème ergodique ci-dessous généralise la loi des grands nombres. Le second théorème ergodique généralise le théorème central limite.

Théorème 5.4 ***Premier Théorème ergodique*** *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov récurrente irréductible admettant une mesure invariante μ telle que $\mu(E) < \infty$. Soit π l'unique probabilité invariante de la chaîne, et soit f une fonction de $L^1(\pi)$.*

Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(X_i) \rightarrow_{p.s.} \int f(x)d\pi(x).$$

Preuve. Admis. ■

Remarque. Dans le cas où $\mu(E) = \infty$, on a quand même le résultat suivant : soit deux fonctions f et g telles que f et g sont dans $L^1(\mu)$ et $\int g d\mu \neq 0$. Alors

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} f(X_i)}{\sum_{i=0}^{n-1} g(X_i)} \to_{p.s.} \frac{\int f d\mu}{\int g d\mu}.$$

Théorème 5.5 ***Deuxième théorème ergodique*** *Sous les hypothèses du Premier Théorème ergodique, on suppose que $\int f(x)^2 d\pi(x) < \infty$, et que $\int f(x) d\pi(x) = 0$. Alors, si l'espace d'états est fini,*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} f(X_i) \to_{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

avec

$$\sigma^2 = 2 \sum_{i \in E} \pi(i) \sum_{n \geq 0} E[f(X_n)|X_0 = i] f(i) - \sum_{i \in E} \pi(i) f(i).$$

3.5.5 Fonctions de coût

On montre également un résultat de convergence asymptotique pour ce qu'on appelle parfois des "fonctions de coût," le terme venant de l'idée de donner un coût à la transition $i \to j$. Une fonction de coût est en fait une fonction de E^2 dans $\mathbb{R}$.

Théorème 5.6 *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible récurrente de probabilité stationnaire π. Soit f une fonction de E^2 dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$\sum_{i,j} p_{ij} |f(i,j)| \pi(i) < \infty.$$

Alors

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(X_i, X_{i+1}) \to_{p.s.} \sum_{i,j} p_{ij} f(i,j) \pi(i).$$

3.6 Estimation

On suppose ici que l'espace d'états est **fini.**

On cherche à estimer les coefficients de la matrice de transition P, à partir d'un vecteur d'observations $(X_0, X_1, ..., X_n)$ correspondant à une trajectoire de la chaîne. Le paramètre $\theta = (p_{i,j})_{0\leq (i,j)\leq k}$.

La vraisemblance du modèle s'écrit

$$L(\theta) = f_0(X_0)\prod_{i=0}^{n-1} p_{X_{i-1},X_{i+1}},$$

où f_0 désigne la densité de X_0 (par rapport à la mesure de comptage).

On cherche alors $\hat{P}$ qui maximise la vraisemblance. En général (mais ce n'est pas obligatoire), on impose la contrainte que, pour tout i, $\sum_{j=0}^{k}\hat{p}_{ij} = 1$ (pour avoir $\hat{P}$ une vraie matrice de transition).

Par ailleurs,

$$\log L(\theta) = \sum_{i,j}\log(p_{ij})Y_{ij},$$

où Y_{ij} désigne le nombre de transitions observées de i vers j,

$$Y_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{1}_{X_k=i,X_{k+1}=j}.$$

Comme on veut optimiser sous la contrainte que $\sum_j p_{ij} = 1$ pour tout i, on procède avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On introduit le Lagrangien

$$\tilde{L}(\theta,\lambda) = \sum_{i,j}\log(p_{ij})Y_{ij} - \sum_i \lambda_i(\sum_j p_{ij} - 1),$$

et on prend $\hat{p}_{ij}$ et $\hat{\lambda}_i$ qui annulent le Lagrangien. Dérivons par rapport à λ_i, on retrouve la contrainte $\sum_j \hat{p}_{ij} = 1$. Dérivons par rapport à p_{ij}, on en déduit que

$$\hat{p}_{ij} = \frac{Y_{ij}}{\hat{\lambda}_i},$$

puis, en utilisant que $\sum_j \hat{p}_{ij} = 1$, on en déduit que $\hat{\lambda}_i = \sum_j Y_{ij}$. D'où

$$\hat{p}_{ij} = \frac{Y_{ij}}{\sum_j Y_{ij}},$$

c'est à dire le nombre de transitions de i vers j, divisé par le nombre de passages en i.

Supposons que la chaîne est irréductible. Alors, comme son nombre d'état est fini, elle est forcément récurrente, et il existe une unique probabilité invariante π. Comme $\sum_j Y_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{X_k=i}$, on peut appliquer le Théorème ergodique pour obtenir que

$$\frac{1}{n}\sum_j Y_{ij} \to_{p.s.} \pi(i).$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{n}Y_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{X_k=i, X_{k+1}=j} \to_{p.s.} \pi(i)p_{ij},$$

par le Théorème 5.6. On en déduit que $\hat{p}_{ij} \to_{p.s.} p_{ij}$. Il est par ailleurs possible de montrer que

$$\sqrt{n}(\hat{p}_{ij} - p_{ij}) \to_{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{p_{ij}(1-p_{ij})}{\pi(i)}\right),$$

(on a également convergence du vecteur des p_{ij} vers une gaussienne multidimensionnelle dont on peut calculer la matrice de covariance).

En posant $\sigma^2 = p_{ij}(1-p_{ij})\pi(i)$, on peut estimer cette variance par $\hat{\sigma}^2 = \hat{p}_{ij}(1-\hat{p}_{ij})\hat{pi}(i)$, où $\hat{pi}$ est une probabilité stationnaire de $\hat{P}$, matrice des (p_{ij}). Par convergence des p_{ij}, on a également $\hat{pi}(i) \to \pi(i)$ p.s. On en déduit que $\hat{\sigma}^2 \to \sigma^2$ p.s., et on peut utiliser cette variance estimée pour construire des régions de confiance (et/ou des tests).

3.7 Exemples

3.7.1 Processus de branchement

On considère une population de bactéries contenues dans une solution (bocal de volume V). On cherche à modéliser l'évolution de l'effectif de la colonie de bactéries au cours du temps. Soit X_n l'effectif de cette colonie au jour n. Chaque bactérie ne vit pas plus de 1 jour. De ce fait, au jour n, il ne reste que les descendants des bactéries présentes au jour $n-1$. On définit X_n l'effectif des bactéries au jour n.

1. On suppose donc que X_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$ tout entier. Dans quelle mesure (condition sur V) cette hypothèse paraît-elle raisonnable ?

2. On définit Y_{in} la variable aléatoire représentant le nombre de descendants de la bactérie i de la génération n. Dans quels cas est-il (dé)raisonnable de modéliser les $(Y_{in})_{i\in\mathbb{N}}$ par des variables i.i.d. ? Dans quels cas est-il (dé)raisonnable de dire que la loi de Y_{in} est indépendante des $Y_{i(n-k)}$? On fera ces hypothèses dans toute la suite.

3. Exprimer X_n en fonction des autres variables du modèle, et montrer que X_n est une chaîne de Markov, dont on donnera les états. Classifier les états de la chaîne suivant que $P(Y=0)\neq 0$ ou $\mathbb{P}(Y=0)=0$.

4. On suppose que X_0 et Y sont dans $\mathbb{L}^1$. Montrer que X_n/m^n est une martingale par rapport à la filtration naturelle du processus $(X_n)_{n\geq 0}$, où m désigne l'espérance de Y, et commenter les différents cas suivant les valeurs de m.

5. En utilisant la théorie des martingales, montrer que, quand $n\to\infty$, on va nécessairement vers une extinction, ou une explosion de la population des bactéries.

6. On suppose que $Y\sim\mathcal{B}(N,p)$ avec N connu. Déterminer la loi de X_n sachant X_{n-1}.

7. On dispose de l'observation d'une trajectoire $(x_0,...,x_n)$ de la chaîne. Ecrire la vraisemblance des observations, et proposer un estimateur de p. (NB : ici, le nombre d'états n'est pas fini, néanmoins, on ne cherche à estimer qu'un nombre fini de paramètres ici)

3.7.2 Une maladie

On étudie une maladie contagieuse, et on s'intéresse à l'état de santé de personnes initialement saines au cours du temps (discret). Au sein de la population, on suppose que $x\%$ des gens sont naturellement immunisés pour des raisons génétiques.

1. Pour simplifier, on suppose que x ne dépend pas du temps n. Dans quelle mesure est-ce (dé)raisonnable ?

2. On suppose que, étant sain, la probabilité de tomber malade est de $y\%$, et qu'elle ne dépend pas du temps, ni du nombre de patients atteints dans la population. Dans quelle mesure est-ce (dé)raisonnable ?

Quand un individu tombe malade à l'instant n, il y a deux cas de figure. A l'instant $n+1$, soit le patient ne guérit pas complétement (probabilité $p(n)$), mais il reste immunisé à vie contre la maladie. Soit il guérit, mais il acquiert une immunité partielle à la maladie, ce qui change sa probabilité de tomber malade de y à $y/2$ (en revanche, s'il retombe malade une seconde fois, son immunité n'est pas améliorée s'il guérit à nouveau).

3. Que doit-on faire comme hypothèses pour avoir le droit de modéliser la santé d'un individu initialement sain par une chaîne de Markov homogène ? Discuter ces hypothèses, et préciser matrice de transition et loi initiale de la chaîne proposée.

4. Classifier les états, déterminer leur période. Déterminer une mesure invariante. Justifier si elle est unique ou non.

5. Calculer la probabilité qu'un individu attrape au moins une fois la maladie. Au moins deux fois ?

6. Une compagnie d'assurance assure des personnes initialement saines contre les conséquences de cette maladie. n désigne le $n-$ème mois, et chaque mois, les assurés paient la prime π. Pendant le mois où la personne tombe malade, la compagnie verse un montant π_1 à l'assuré, et une indemnité π_2 dès qu'il développe des séquelles (une indemnité versée d'un seul coup au premier mois de séquelles). N contrats d'assurance ont été souscrits, et on suppose qu'il n'y a pas de moyen de déterminer si un individu est immunisé ou non. Que doit satisfaire π pour que, en moyenne, au bout de n_0 mois de contrat, le bilan de la compagnie soit nul ?

Chapter 4

Processus de Poisson

4.1 Définition et propriétés élémentaires

4.1.1 Exemple : crises d'asthme

Soit $N(t)$ le nombre de crises d'asthmes que connaît un individu entre 0 et $t \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'un processus à espace des temps continu, et à espace des états discret ($N(t)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$). On a $N(0) = 0$, et on suppose qu'il ne peut se produire qu'une seule crise d'asthme à la fois. Soit $S_1 = T_1$ la date (aléatoire) à laquelle intervient la première crise d'asthme, $S_2 = S_1 + T_2$ le temps séparant la première et la deuxième crise, etc. On a $N(t) = 0$ pour $t \in [0, T_1[$, $N(t) = 1$ pour $t \in [S_1, S_2[$, $N(t) = 2$ pour $t \in [S_2, S_3[$ etc. Modéliser le processus $N(t)$ revient donc à modéliser la suite des temps entre chaque crise $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.

4.1.2 Modélisation des temps inter-arivées

La suite des temps $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est appelée suite des temps inter-arrivées (vocabulaire des files d'attente). Le modèle le plus simple consiste à supposer la suite des v.a. T_i comme indépendantes, et de même loi. Quelle loi choisir pour modéliser les T_i ? Un processus de Poisson correspond à une suite de temps d'attente i.i.d. suivant une loi exponentielle.

La raison pour considérer une loi exponentielle vient de la notion de taux de risque instantané. Pour une variable T discrète, le taux de risque instantané est défini comme

$$\lambda(t) = \frac{\mathbb{P}(T = t)}{\mathbb{P}(T \geq t)} = \mathbb{P}(T = t | T \geq t).$$

Il s'agit de la probabilité que l'événement se produise à la date t sachant qu'il ne s'est toujours pas produit (d'où le terme risque instantané). Dans le cas des crises d'asthme, le temps T doit être considéré comme continu (la crise peut intervenir à chaque instant). Dans ce cas, le taux de risque instantané d'une variable T continue se définit comme

$$\lambda(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{\mathbb{P}(T \in [t; t + dt[)}{\mathbb{P}(T \geq t) dt} = \lim_{dt \to 0} \frac{1}{dt} \mathbb{P}(T \in [t; t + dt[| T \geq t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)},$$

où f désigne la densité de T et F la fonction de répartition de T. Le cas le plus simple consiste à supposer que ce taux de risque est constant au cours du temps. Il est facile de montrer (exercice) que $\lambda(t) = \lambda$ équivaut à T suit une loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Cette propriété est appelée parfois **absence de mémoire** de la loi exponentielle.

Définition 1.1 *Soit $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$. Le processus $N(t)$ tel que $N(t) = i$ pour $t \in [S_i, S_{i+1}[$ et $N(t) = 0$ pour $t \in [0, S_1[$ est appelé processus de Poisson d'intensité λ. On a*

$$N(t) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{S_n \leq t}.$$

Remarque 1. Une autre façon d'écrire la propriété que $N(t) = i$ sur $[s_i, s_{i+1}]$ est de dire que $N(t) - N(t-) \in \{0, 1\}$ pour tout t ($N(t)$ est une fonction constante par morceaux dont les sauts sont de 1).

Remarque 2. Pour la modélisation, il y a donc deux hypothèses principales à justifier : le fait que les temps interarrivées sont indépendants, et l'homogénéité (le risque instantané qu'un événement se produise ne dépend pas du temps, i.e. $\lambda(t) = \lambda$ pour tout t).

4.1.3 Discussion des hypothèses

Sur l'exemple des crises d'asthme, l'indépendance entre les temps interarrivées peut paraître raisonnable : par exemple on ne voit pas très bien pourquoi, s'il y a eu un temps important entre la crise i et la crise $i + 1$, cela devrait influer sur le temps entre la crise $i+1$ et la crise $i+2$. Dans d'autres types de situations modélisées, cette hypothèse peut être forte.

Si on s'intéresse à modéliser $N(t)$ = nombre de phases de micro-sommeil d'un routier au cours d'une nuit, l'hypothèse devient plus contestable : si T_i est grand cela veut dire que le routier est resté éveillé longtemps, donc il va avoir plus besoin de dormir, donc on a le sentiment que T_{i+1} devrait être assez petit.

L'autre point contestable concerne l'homogénéité du processus (i.e. le risque est constant, égal à λ). Ceci n'est raisonnable que si l'on modélise le phénomène sur une durée assez courte : avec l'âge, la fréquence des crises d'asthme peut varier. De plus, il faut que le sujet reste dans un environnement identique : s'il passe d'un environnement protégé à un environnement saturé de pollens, cela peut influer également sur la fréquence de ces crises.

4.1.4 Autres exemples

Nombre de pannes. La durée de vie d'un composant électronique est souvent modélisée par une loi exponentielle, parce que ces composants sont généralement considérés comme peu sensibles à l'usure (risque instantané de défaillance constant, en revanche, si on considère la durée de vie de composants sujets à l'usure, cette hypothèse n'est plus valide du tout). A chaque défaillance, le composant est remplacé par un composant identique. Dans ce modèle, le nombre de pannes observées au cours du temps est un processus de Poisson.

Serveur informatique. On modélise souvent le nombre de téléchargements, sur un serveur informatique par un processus de Poisson. L'importance est de déterminer, en fonction de la capacité du serveur et de l'intensité des arrivées, à partir de combien de temps le serveur va être saturé. L'indépendance entre les arrivées est légitime si l'on considère que les gens qui téléchargent ne se sont pas concertés (valable notamment si les téléchargeurs sont répartis sur toute la France voire sur la planète). En revanche, à nouveau, l'homogénéité n'est valable que sur une courte période. En effet, il y a des plages horaires où le nombre de téléchargements est plus important (peu de téléchargements durant la nuit, plus dans la tranche horaire où les gens sortent du travail et utilisent leur ordinateur personnel etc.).

Nombre de sinistres. Les processus de Poisson sont souvent utilisés pour modéliser le nombre de sinistres auxquels doit faire face une compagnie d'assurance. Dans ce genre de cas non plus, l'indépendance entre les temps interarrivées n'est pas choquante, étant donné qu'on regarde un grand nombre d'assurés qu'on peut supposer indépendants (en revanche, si $N(t)$ représente le nombre de sinistres que connaît un seul assuré qui assure sa maison, l'hypothèse devient très contestable). L'homogénéité peut poser problème : s'il n'y a pas beaucoup de sinistres au cours d'une année, les assurés vont peut-être avoir tendance à ne pas se réassurer (considérant que le risque n'est pas important), il y aura donc moins d'assurés, et donc généralement moins de sinistres. Par ailleurs, en assurance dommages, les risques ne sont pas identiques suivant la saison (plus d'incendies en été, d'inondations en hiver et automne etc).

4.1.5 Propriétés élémentaires

Proposition 1.2 *On considère $N(t)$ un processus de Poisson d'intensité λ.*

1. $N(t+s) - N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda s)$.

2. *Soit $\mathcal{F}_t = \sigma(N(t') : t' \leq t)$. On a $N(t+s) - N(t)$ indépendant de $\mathcal{F}_t$ pour tout $s > 0$.*

3. *Soit $t_1 < t_2 < ... < t_n$ et $t_0 = 0$, alors $N(t_{i+1}) - N(t_i)$ est indépendant de $N(t_{j+1}) - N(t_j)$ pour $i \neq j$ (processus à accroissements **indépendants**).*

4. *On a* $\mathrm{Cov}(N(s), N(t)) = \lambda \min(s,t)$.

En particulier, on en déduit qu'un processus de Poisson est un processus **à accroissements stationnaires** (et indépendants).

Définition 1.3 *Un processus $(P(t))_{t\geq 0}$ à espace de temps continu est dit à accroissements stationnaires si, pour toute suite d'intervalles de temps $[t_i, s_i]$ (disjoints ou non), la loi de $(P(s_1)-P(t_1), ..., P(s_i)-P(t_i), ..., P(s_n)-P(t_n))$ est la même que celle de $(P(s_1+t)-P(t_1+t), ..., P(s_i+t)-P(t_i+t), ..., P(s_n+t)-P(t_n+t))$, pour tout t.*

Preuve de la Propostion 1.2.
Preuve du point 1. Commençons par le cas $s = 0$. Remarquons que

$$\{S_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\}.$$

D'où

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = \mathbb{P}(S_n \le t) - \mathbb{P}(N(t) \ge n+1) = \mathbb{P}(S_n \le t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \le t).$$

Par ailleurs, S_n est une somme de n v.a. exponentielles indépendantes de paramètre λ. Donc S_n suit une loi Gamma de paramètres n et λ. On en déduit

$$\mathbb{P}(S_n \le t) = \int_0^t \frac{\lambda^n e^{-\lambda x} x^{n-1} dx}{\Gamma(n)},$$

et on rappelle que $\Gamma(n) = (n-1)!$. On en déduit

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = \left[\frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^n}{n!}\right]_0^t = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}.$$

Pour passer au cas $s > 0$, il suffit de vérifier que $(N(t+s) - N(t))_{s \ge 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ. Notons $A_t(s)$ ce processus. On a bien $A_t(0) = 0$. De plus, définissons $T_i' = T_{N(t)+i}$ pour $i \ge 2$, et $T_1' = S_{N(t)+1} - t$, les temps inter-arrivées associés au processus A_t. Comme la suite des temps interrarivés est i.i.d., la suite des $(T_i')_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a. indépendantes, et $T_i' \sim \mathcal{E}(\lambda)$ pour $i \ge 2$. Il reste à vérifier que T_1' suit bien une loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Or, on a

$$\mathbb{P}(T_1' \ge u | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(T_{N(t)+1} \ge u + T_1 + ... + T_{N(t)} | \mathcal{F}_t).$$

Ainsi, sur l'événement $E = \{N(t) = k, T_1 = t_1, ..., T_{N(t)} = t_k\}$, et puisque les T_i sont indépendants, cette probabilité se réécrit

$$\mathbb{P}(T_1' \ge u | E) = \mathbb{P}(T_{k+1} \ge u | T_{k+1} \ge t_k - t_{k-1}),$$

avec la convention $t_0 = 0$. Comme les T_i sont indépendants, cette probabilité se réécrit

$$\mathbb{P}(T_1 \ge u + (t_k - t_{k-1}) | T_1 \ge t_k - t_{k-1}) = \mathbb{P}(T_1 \ge u),$$

par absence de mémoire de la loi exponentielle. Cette probabilité conditionnelle ne dépend pas de E, donc $\mathbb{P}(T_1' \ge u|) = \exp(-\lambda u)$, et T_1' suit donc une loi exponentielle de paramètre λ.

Preuve du point 2. Calculons $\mathbb{P}(T_1' \ge u | \mathcal{F}_t) = \exp(-\lambda u)$, et que les T_i' sont indépendants de $\mathcal{F}_t$ pour $i \ge 2$, on en déduit le point 2.

Preuve du point 3. Conséquence immédiate du point 2.

Preuve du point 4. Prenons $s < t$. On a

$$E[N(t)N(s)] = E[N(s)(N(t) - N(s))] + E[N(s)^2].$$

Par le point 3, $N(t) - N(s)$ est indépendant de $N(s) = N(s) - N(0)$. Donc $E[N(s)(N(t)-N(s))] = E[N(s)]E[N(t)-N(s)] = \lambda^2 s(t-s)$, par le point 1, et, toujours par le point 1, $E[N(s)^2] = \lambda s + \lambda^2 s^2$. Comme $E[N(t)]E[N(s)] = \lambda^2 ts$, on en déduit

$$\mathrm{Cov}(N(t), N(s)) = \lambda s.$$

■

Citons également les résultats suivants, qui se montrent à partir de la Proposition 1.2.

Proposition 1.4 1. ***Nombre de sauts presque sûrement fini.*** *Pour tout t, $\mathbb{P}(N(t) = \infty) = 0$.*

2. ***Rapport signal sur bruit.*** *On a*

$$\frac{E[N(t)]}{\sigma(N(t))} = \sqrt{\lambda t},$$

qui tend donc vers l'infini quand t tend vers l'infini.

3. ***Distribution conditionnelle des temps inter-arrivées.*** *Conditionnellement à $\{N(t) = n\}$, la distribution des temps inter-arrivées est la même que celle de $(U_{(1)}, ..., U_{(n)})$, vecteur des statistiques d'ordre de n variables indépendantes de loi uniforme sur $[0, t]$.*

Le 3ème point de la Proposition 1.4 est particulièrement important pour la statistique des processus de Poisson, puisqu'il fournit que $N(t)$ est une statistique exhaustive pour λ lorsque l'on observe une trajectoire sur $[0, t]$.

Preuve. Les deux premiers points sont évidents. Une façon de montrer le troisième point consiste à montrer que, pour tout intervalle $[a, b] \subset [0, t]$, la loi du nombre de sauts de $N(t)$ dans $[a, b]$ conditionnellement à $N(t) = n$ est la même que la loi du nombre de variables d'un $n-$échantillon de v.a. uniformes sur $[0, t]$ $(U_1, ..., U_n)$ tombant dans l'intevalle $[a, b]$. Soit X le nombre de sauts de $N(t)$ dans $[a, b]$, et $Y = N(t) - X$. On déduit de la proposition 1.2 que X

et Y sont indépendants et suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda(b-a)$ et $\lambda(t-[b-a])$. On a, pour tout $k \leq n$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k|N(t)=n) &= \frac{\mathbb{P}(X=k, X+Y=n)}{\mathbb{P}(N(t)=n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(N(t)=n)} \\
&= \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\left(\frac{b-a}{t}\right)^k\left(1-\frac{b-a}{t}\right)^{n-k} \\
&= \mathbb{P}(\mathrm{Card}\{U_1,...,U_n\} \cap [a,b] = k).
\end{aligned}$$

■

Enfin, terminons cette question par un résultat sur la somme de deux processus de Poisson.

Proposition 1.5 *Soit N_1 un processus de Poisson d'intensité λ, et N_2 un processus de Poisson d'intensité μ indépendant de N_1. Alors N_1+N_2 est un processus de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.*

Preuve. La preuve est très simple à partir de la définition en terme de temps inter-arrivées. On a bien entendu $N_1(0)+N_2(0)=0$. Par ailleurs, le saut $N_1(t)-N_1(t-)+N_2(t)-N_2(t-) \in \{0,1\}$, car, au point t, chacun des processus saute au plus de 1, et la probabilité que N_1 et N_2 sautent au même point t est nulle, puisque les deux processus sont indépendants et que leurs temps inter-arrivées ont une distribution continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Il reste à vérifier que la distribution des temps inter-arrivées de N_1+N_2 est exponentielle. Soit T_1' le premier temps inter-arrivées. La probabilité qu'un saut se produise est donc l'inf de deux v.a. exponentielles indépendantes, de paramètres respectifs λ et μ. Or, on a le résultat classique (exercice) que $\inf(X,Y) \sim \mathcal{E}(\lambda+\mu)$ lorsque X et Y sont deux variables exponentielles indépendantes. Par absence de mémoire des processus de Poisson, on montre de même que tout T_i' suit une loi exponentielle, et qu'il y a indépendance entre ces temps inter-arrivées. ■

4.2 Processus de Poisson composé

4.2.1 Exemple

Reprenons l'exemple des sinistres que doit couvrir une compagnie d'assurance. La plupart du temps, ces sinistres n'ont pas le même coût, et l'indemnisation n'est pas la même. On peut conserver le modèle simple d'un processus de Poisson pour le temps inter-arrivées. Néanmoins, il faut également modéliser le coût de chaque sinistre pour l'assureur. A chaque instant de saut, on modélise le coût par une variable aléatoire.

Une hypothèse simplificatrice consiste à supposer que ces coûts sont des v.a. i.i.d., indépendantes du processus de Poisson sous-jacent. Cette hypothèse est contestable dans certaines situations : si les sinistres successifs sont liés à la même cause, l'hypothèse peut être mise en défaut. Par exemple, le sinistre à la date t_1 est un incendie, et le coût du sinistre est très important (gros dégâts). A la date t_2, un autre incendie se produit dans la même région. Le coût devrait être d'autant plus petit que les dates t_1 et t_2 sont peu espacées (il n'y a plus rien à brûler). Ainsi, dans cet exemple, la variable coût d'un sinistre devrait dépendre du coût des sinistres précédents, de leur dates d'occurence, et éventuellement de leur nombre.

Néanmoins, si on considère un nombre d'assurés suffisamment importants, bien répartis sur l'ensemble du territoire et de la population, il est raisonnable de supposer que les sinistres sont indépendants (ou très peu dépendants) les uns des autres. De plus, il est raisonnable de penser que la loi des coûts évolue peu dans le temps si l'on se contente d'observer sur une durée pas trop longue.

4.2.2 Définition

Définition 2.1 ***Processus de Poisson composé.*** *Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de même loi qu'une v.a. X, indépendantes d'un processus de Poisson $N(t)$ d'intensité λ. Le processus*

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

est appelé processus de Poisson composé d'intensité λ associée à la v.a. X.

On peut vérifier (exercice) qu'un processus de Poisson est un processus de Poisson composé ssi les v.a. X_i suivent des lois de Bernoulli.

Remarque. Pour la modélisation, les griefs qu'on peut avoir contre le processus de Poisson composé sont tout d'abord ceux que l'on peut avoir contre un processus de Poisson. Les hypothèses supplémentaires qu'il est nécessaire de discuter sont : le fait que les X_i soit indépendantes, le fait qu'elles soit identiquement distribuées (ce qui peut se voir comme une propriété d'homogénéité).

4.2.3 Quelques propriétés

Proposition 2.2

1. *Si* $\mathbb{P}(X < \infty)$, *alors* $\mathbb{P}(S(t) < \infty)$, *si* $E[|X|^k] < \infty$, $E[|S(t)|^k] < \infty$.

2. *Si* $E[|X|] < \infty$, $E[S(t)] = \lambda t E[X]$, *si* $E[X^2] < \infty$, $\mathrm{Var}(S(t)) = \lambda t E[X^2]$.

3. ***Trajectoires.*** *La fonction (aléatoire)* $t \to N(t)$ *est constante par morceaux, de sauts presque sûrement finis si* $\mathbb{P}(X < \infty) = 1$.

4. *Le processus est à accroissements indépendants et stationnaires.*

5. *Soit* $\phi(u) = E[\exp(iuX)]$ *la fonction caractéristique de* X. *Alors, la fonction caractéristique de* $S(t)$, $\Psi_t(u) = E[\exp(iuS(t))]$ *satisfait*

$$\Psi_t(u) = e^{\lambda t(\phi(u)-1)}.$$

Preuve. Le point 1 est évident, en considérant tout d'abord la loi conditionnellement à $N(t) = n$, puis en prenant l'espérance. Illustration pour déterminer l'espérance de $S(t)$: (point 2)

$$E[S(t)] = E[E[S(t)|N(t)]] = E[N(t)E[X]] = E[X]E[N(t)].$$

Pour la variance,

$$\mathrm{Var}(S(t)|N(t)) = N(t)\mathrm{Var}(X),$$

donc $E[\mathrm{Var}(S(t)|N(t))] = \lambda t \mathrm{Var}(X)$, et $\mathrm{Var}[E[S(t)|N(t)]^2] = E[X]^2\lambda t$, d'où $\mathrm{Var}S(t) = \lambda t E[X^2]$.

Le point 3 est évident, le point 4 vient de la Proposition 1.2.

Pour la fonction caractéristique,

$$\begin{aligned}
\Psi_t(u) &= E[E[\exp(iuS(t))|N(t)]] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t)=n)E[\exp(iu\sum_{k=1}^{n} X_k)] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t)=n)\phi(u)^n,
\end{aligned}$$

et le résultat suit. ■

Dans le cas où X prend un nombre fini de valeurs (par exemple s'il n'existe que deux coûts de sinistre possibles), on peut se demander si la modélisation par processus de Poisson composé est équivalente à la modélisation par plusieurs processus de Poisson, d'intensité différentes, correspondant à chaque modalité de la variable X. Ainsi, si X prend ses valeurs dans $\{1, 2\}$, on pourrait considérer $S'(t) = N_1(t) + 2N_2(t)$, où $N_1(t)$ et $N_2(t)$ sont des processus de Poisson indépendants (le $N_1(t)$ correspondrait aux cas où $X = 1$, et $N_2(t)$ aux cas où $X = 2$). Alors $N_1(t) + N_2(t)$ étant un processus de Poisson (voir Proposition 1.5), la loi de $S'(t)$ est celle d'un processus de Poisson composé.

Réciproquement, si on définit $N_1(t) = \sum_{i=1}^{N}(t)\mathbf{1}_{X_i=1}\mathbf{1}_{S_i\leq t}$, (nombre d'événements tels que $X = 1$), on retombe sur un processus de Poisson.

On peut également montrer le résultat suivant (exercice) :

Proposition 2.3 *Un processus de Poisson composé est un processus de Poisson ssi X suit une loi de Bernoulli.*

4.3 Processus de Poisson et chaînes de Markov

Considérons un exemple pour les files d'attente. On s'intéresse au nombre de clients dans une file d'attente (ayant une capacité fini ou non). On définit X_n = nombre de clients dans la file à la date n, en supposant donc qu'on observe le nombre de clients dans la file à intervalles de temps réguliers (toutes les α minutes, par exemple). Entre n et $n-1$, des clients sont servis (sortent de la file), tandis que d'autres font leur entrée dans la file.

Le phénomène des arrivées, ainsi que celui des départs sont des phénomènes en temps continu. Un modèle simple consiste à modéliser chacun de ces phénomènes par deux processus de Poisson d'intensité a priori différentes.

Ainsi, si la loi des arrivées suit un processus de Poisson de paramètre λ, le nombre d'arrivées entre l'instant n et l'instant $n-1$ suivra une loi de Poisson de paramètre $\lambda\alpha$. De même, une loi de Poisson de paramètre $\mu\alpha$ pour les départs. Ce qui donne un nombre de clients dans la chaîne à l'instant n $N_1(n\alpha) - N_2(n\alpha)$, différence de deux processus de Poisson qu'on peut supposer indépendants si l'on veut faire simple (mais là encore, il faut bien penser que cette hypothèse ne va pas de soi : un grand nombre d'arrivées peut inciter les employés en bout de chaîne à accélérer le service des clients).

On a donc $X_n = X_{n-1} + (N_1 - N_2)(n\alpha) - (N_1 - N_2)((n-1)\alpha)$. Les processus de Poisson étant à accroissements indépendants, on obtient que

$$\begin{aligned} E[f(X_n)|\mathcal{F}_{n-1}] &= \sum_{k=0}^{\infty} f(X_{n-1}+k)\mathbb{P}((N_1-N_2)(n\alpha) - (N_1-N_2)((n-1)\alpha) = k) \\ &= Pf(X_{n-1}), \end{aligned}$$

la matrice P ne dépendant pas de n par stationnarité des accroissements. X_n est donc une chaîne de Markov homogène.

4.4 Estimation de l'intensité d'un processus de Poisson

On observe une portion de trajectoire réalisation d'un processus de Poisson d'intensité λ inconnue, i.e. on observe une fonction $t' \to N(t')$ pour $t \in [0,t]$. Ceci revient à dire qu'on observe la suite des valeurs des temps d'arrêt, c'est à dire que les observations sont constituées de $(T_1, ..., T_N(t))$.

Proposition 4.1 *Soit N un processus de Poisson d'intensité λ. Soit t l'instant de fin d'observation du processus.*

1. *La statistique $N(t)$ est exhaustive complète pour λ.*
2. *$\hat{\lambda} = N(t)/t$ est l'ESBO de λ.*
3. *$\hat{\lambda}$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ.*
4. *On a, quand t tend vers l'infini, $\hat{\lambda} \to \lambda$ p.s. et en moyenne quadratique, et*
$$\sqrt{t}(\hat{\lambda} - \lambda) \to_{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Preuve. L'exhaustivité se déduit immédiatement du point 3 de la Proposition 1.4, puisque l'on voit que la loi des observations conditionnellement à $N(t)$ ne dépend pas de λ. $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt, cette statistique est donc complète (propriété des familles exponentielles). $N(t)/t$ est sans biais, fonction de la statistique exhaustive complète, donc $N(t)/t$ est l'ESBO (optimal au sens du risque quadratique). Pour le point 3, on considère une mesure μ $\sigma-$finie sur l'ensemble des suites réelles qui s'annulent pour n suffisamment grand. Les observations peuvent être vues comme des points de cet espace. La densité des observations s'écrit alors

$$C\lambda^{N(t)}\exp(-\lambda\sum_{i=1}^{N(t)}T_i)\mathbb{P}\left(T_{N(t)+1}\geq t-\sum_{i=1}^{N(t)}T_i|(T_i)_{1\leq i\leq N(t)}\right),$$

où C est une constante normalisatrice, ce qui se réécrit

$$C\lambda^{N(t)}\exp(-\lambda t).$$

Il s'agit d'une autre manière de montrer l'exhaustivité. En dérivant, on obtient que $\hat{\lambda}$ est bien l'EMV.

Pour le dernier point, montrons la convergence presque sûre. Notons $[t]$ la partie entière de t. On a $N([t])/[t]=[t]^{-1}\sum_{i=1}^{[}t](N(i)-N(i-1))$. Il s'agit d'une suite de variables i.i.d., donc la loi forte des grands nombres s'applique, et on a que $N([t])/[t]\rightarrow\lambda$ p.s. On remarque ensuite que

$$\frac{[t]}{t}\frac{N([t])}{[t]}\leq\frac{N_t}{t}\leq\frac{N([t+1])}{[t+1]}\frac{[t+1]}{t},$$

d'où le résultat.

La convergence en moyenne quadratique : on a

$$E\left[\left(\frac{N(t)}{t}-\lambda\right)^2\right]=\mathrm{Var}\left(\frac{N(t)}{t}\right)=\frac{\lambda}{t},$$

qui tend vers 0.

Pour la convergence en loi, on peut la montrer facilement pour $[t]^{1/2}(N([t])/[t]-\lambda)$ par le théorème central limite. Remarquons que

$$t^{1/2}(\hat{\lambda}-\lambda)=[t]^{1/2}\left(\frac{N([t])}{[t]}-\lambda\right)\frac{t^{1/2}}{[t]^{1/2}}+t^{1/2}\left(\frac{[t]N(t)-tN([t])}{t[t]}\right).$$

Le premier terme converge en loi vers une $\mathcal{N}(0,\lambda)$. Le deuxième terme converge en probabilité vers 0, car il converge en moyenne quadratique vers 0. En effet, l'espérance du carré du deuxième terme se réécrit

$$t\left(\mathrm{Var}(N(t)/t) + \mathrm{Var}(N([t])/[t]) - 2t^{-1}[t]^{-1}\mathrm{Cov}(N(t), N([t]))\right) \rightarrow_{t\to\infty} 0.$$

$\blacksquare$

4.5 Exemple : Ruine d'une compagnie d'assurance

Une compagnie d'assurance possède m assurés. Chaque année, les assurés paient une prime π, qui est censée compenser les risques pris par l'assureur. Ainsi, si C_n désigne le coût total des sinistres que doit endosser la compagnie la $n-$ème année, la situation financière de l'assurance à l'issue de l'année n est $F_n = F_{n-1} - C_n + m\pi$, $F_0 = R$ (réserve de départ). On note $N(t)$ le nombre de sinistres survenus entre 0 et t, $t = n$ correspond à la $n-$ème année. Lorsque F_n atteint la valeur 0, la compagnie fait faillite.

1. On suppose, dans un premier temps, qu'un seul type de sinistre (de coût 1) peut survenir. On modélise N par un processus de Poisson homogène d'intensité λ inconnue. Discuter ce modèle.

2. Justifier que $(F_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène dont on précisera la matrice de transition, et classifier les états. Existe-t-il une unique probabilité invariante ? Si oui, laquelle ? Si non, pourquoi ? Que doit satisfaire π pour que $(F_n)_{n\geq 0}$ soit une martingale (resp. une sous-martingale, resp. une surmartingale) relativement à sa propre filtration ? On supposera π quelconque par la suite.

3. Calculer la transformée de Laplace $W_n(u) = E[\exp(uF_n)]$. Que doit valoir u_0 pour que $(W_n(u_0))_{n\geq 0}$ soit une martingale non constante relativement à la filtration naturelle de $(F_n)_{n\geq 0}$?

4. On définit $T = \inf\{n : F_n = 0\}$. Montrer que T est bien un temps d'arrêt relatif à la filtration naturelle de $(F_n)_{n\geq 0}$. Soit β un entier positif quelconque. Utiliser un théorème d'arrêt pour obtenir une majoration de $\mathbb{P}(T \leq \beta)$. En déduire une majoration de $\mathbb{P}(T < \infty)$.

5. On suppose à présent que chaque sinistre a un coût aléatoire. On suppose que les sinistres sont indépendants, identiquement distribués, de loi $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$. Critiquer ce modèle pour le coût des sinistres. Commentaires sur μ_1 et σ_1 ?

6. Calculer $W_n(u) = E[\exp(uF_n)]$ avec cette nouvelle hypothèse, et déduire une majoration du type $\mathbb{P}(T < \infty) \leq \alpha$.

7. On suppose μ_1 connu, et λ estimé par la méthode du maximum de vraisemblance en observant le nombre de sinistres sur n_0 années. Proposer un intervalle de confiance asymptotique à 95% pour α.

8. On suppose μ_1 inconnu. Proposer un estimateur de μ_1 basé sur l'observation des sinistres au cours de n_0 années.